STUDIER

ÖFVER

NÅGRA FUNKTIONALEKVATIONER

I FORM AF

ADDITIONSTEOREM.

AKADEMISK AFHANDLING

SOM MED TILLSTÅND AF

VIDTBERÖMDA FILOSOFISKA FAKULTETENS I UPSALA MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA SEKTION

TILL OFFENTLIG GRANSKNING FRAMSTÄLLES

AF

AXEL BRUSIIN

FILOSOFIE LICENTIAT AF SMÅLANDS LANDSKAP.

Å LÄROSALEN N:o 11 MÅNDAGEN DEN 17 JANUARI 1898 KL. 10 F. M.

STOCKHOLM
IVAR HÆGGSTRÖMS BOKTRYCKERI
1897.

Tryckfel:

Sid.	4,	rad.	4 nedifr.	*står:*	$B'_2(u) =$ konstant	*läs:*	$B_2(u) =$ konstant
»	6,	»	1 uppifr.	»	(10)	»	(11)
»	8,	»	7 »	»	Iakttages nu	»	Iakttagas
»	17,	»	1 »	»	(53e)	»	(53d)
»	19,	»	14 »	»	(63a)	»	(62a)
»	19,	»	6 nedifr.	»	—	»	$\}$ —
»	20,	»	3 »	»	(63a) och (63b)	»	(62a) och (62b)
»	25,	»	12 »	»	$\lvert C(i\beta) \rvert$	»	$C(i\beta)$
»	26,	»	16 »	»	(x)	»	$\lvert x \rvert$
»	30,	»	2 uppifr.	»	$hf'_{k_1}(x+a)$	»	$hf'_k(x+a)$
»	32,	»	10 »	»	(62)	»	(63)

På sid. 30 och 32 skall högra membrum i uttrycken för $S_{k_1}(x)$ och $S_{k_1}(ix)$ *inverteras.* Formeln (84) bör således hafva utseendet:

$$S_{k_1}(ix) = i\,\frac{S_k(x)}{C_k(x)\,D_k(x)}.$$

Tillägg:

Satsen på sid. 36 gäller äfven för s. k. karakteristiska additionsteorem.

Inledning.

Erfarenheten har visat, att de trigonometriska funktionerna spela en stor roll i den tillämpade matematiken. Då dessa funktioner äga hvad man kallar additionsteorem och då teoremen i själfva verket i sig innefatta nämnda funktioner i så att säga koncentrerad form eller med andra ord, enär dessa funktioner kunna definieras medels additionsteoremen, så ligger den frågan nära till hands, om man icke af på förhand uppställda funktionalekvationer i form af additionsteorem skulle kunna härleda funktioner, som ur teoretisk synpunkt vore af lika stort intresse som de trigonometriska, om de också icke ägde samma omedelbara användning som nyssnämnda funktioner. Den så formulerade frågan är icke ny. I BIERMANNS' på WEIERSTRASS' undersökningar grundade arbete »*Theorie der Analytischen Functionen*»* härledes exponentialfunktionen ur funktionalekvationen

$$f(x+y)=f(x)f(y).$$

Än mer, funktionalekvationer i form af algebraiska additionsteorem äro generellt behandlade af Weierstrass. Han har angifvit, hvilka karakterer de funktioner äga, som satisfiera sådana funktionalekvationer**. Men någon mera allmän metod att lösa individuella former har jag mig icke bekant.

I den af TISSERAND utgifna exempelsamlingen »*Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal*», *Paris 1877*, förekomma på sidorna 189—194 några enkla uppgifter, i hvilka det just är fråga om att finna funktioner, som satisfiera en för hvarje uppgift särskildt angifven additionsformel eller en funktionalekvation af annan form, där två af hvarandra oberoende variabler ingå. Exempelvis har problemet n:r 31 följande lydelse:

---

* Leipzig 1887.

** WEIERSTRASS, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen (herausgegeben von H. A. Schwarz).

PHRAGMÉN, En sats ur de elliptiska funktionernas teori. Öfversigt af Kongl. Vetensk.-Akad. Förhandl. 1884. N:o 9. Stockholm.

»Trouver toutes les fonctions f jouissant de la propriété

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)},$$

quelles que soit les valeurs de x et y.»

Följande den tankegång, som genomgår behandlingen af dessa uppgifter, har jag för lösningen af sådana sökt utfinna en mera allmängiltig och bestämd metod, en metod, som vore användbar äfven i sådana fall, då flera obekanta funktioner ingå i additionsformeln. Att lämna någon abstrakt redogörelse för nämnda metod anser jag obehöfligt, då den omedelbart torde framgå ur det sätt, hvarpå jag behandlat de uppgifter, som utgöra föremålet för denna uppsats. *Satsen**, som föregår behandlingen af själfva uppgifterna, utgör i själfva verket nyckeln till metoden.

* Se sid. 3.

1.

En funktionalekvation af formen

$$\sum_{\mu=1}^{n}\{a_\mu(x)\beta_\mu(y) - a_\mu(y)\beta_\mu(x)\} = 0,$$

där $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_n$ *äro funktionssymboler, entydiga eller flertydiga, och där variablerna* x *och* y *äro af hvarandra oberoende, satisfieras identiskt och generellt af systemet*

$$a_\mu(u) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\,\nu}\beta_\nu(u), \quad (u = x,\ y;\ \mu = 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ n;\ a_{\mu,\,\nu} = a_{\nu,\,\mu}),$$

under förutsättning af att **ingen som helst** *lineär relation af formen*

$$c_1\beta_1(u) + c_2\beta_2(u) + \ldots\ldots c_n\beta_n(u) = 0$$

förefinnes, där $c_1, c_2 \ldots\ldots c_n$ *äro godtyckliga konstanter.*

Bevis från $n - 1$ till n.

För $n = 2$ ha vi att undersöka ekv.

$$a_1(x)\beta_1(y) - a_1(y)\beta_1(x) + a_2(x)\beta_2(y) - a_2(y)\beta_2(x) = 0. \tag{1}$$

Divideras denna ekvations termer med $\beta_1(x)\beta_1(y)$, får den formen

$$\frac{a_1(x)}{\beta_1(x)} - \frac{a_1(y)}{\beta_1(y)} + \frac{a_2(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_2(y)}{\beta_1(y)} - \frac{a_2(y)}{\beta_1(y)}\cdot\frac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)} = 0. \tag{2}$$

Vi införa beteckningarna:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{a_1(u)}{\beta_1(u)} = A_1(u); \\[2ex] \dfrac{a_2(u)}{\beta_1(u)} = A_2(u);\ \ \dfrac{\beta_2(u)}{\beta_1(u)} = B_2(u),\ \ (u = x,\ y). \end{array}\right. \tag{3}$$

Ekv. (2) kan nu skrifvas

$$A_1(x) - A_1(y) + A_2(x)B_2(y) - A_2(y)B_2(x) = 0. \tag{4}$$

Deriveras denna med afseende på x, erhålles

$$A'_1(x) + A'_2(x) B_2(y) - A_2(y) B'_2(x) = 0.$$

Deriveras sistskrifna ekv. med afseende på y, fås

$$A'_2(x) B'_2(y) - A'_2(y) B'_2(x) = 0,$$

hvaraf

$$\frac{A'_2(x)}{B'_2(x)} = \frac{A'_2(y)}{B'_2(y)}.^*$$

Då variablerna x och y äro af hvarandra oberoende, följer häraf med nödvändighet, att

$$\frac{A'_2(u)}{B'_2(u)} = a_{2,2}, \ (u = x, \ y; \ a_{2,2} = \text{konstant kvantitet}).$$

Integreras sistskrifna uttryck, får man

(5) $$A_2(u) = a_{2,1} + a_{2,2} B_2(u),$$

där $a_{2,1}$ är en integrationskonstant.

Insättas uttrycken för $A_2(x)$ och $A_2(y)$ ur (5) i (4), erhålles

$$A_1(x) - a_{2,1} B_2(x) = A_1(y) - a_{2,1} B_2(y).$$

Då x och y äro af hvarandra oberoende, följer häraf, att

(6) $$A_1(u) - a_{2,1} B_2(u) = a_{1,1}, \ (u = x, \ y; \ a_{1,1} = \text{konstant}).$$

Införa vi en konstant $a_{1,2}$ och fastställa, att $a_{1,2} = a_{2,1}$, så kan ekv. (6) skrifvas

(7) $$A_1(u) = a_{1,1} + a_{1,2} B_2(u).$$

Med aktgifvande på beteckningarna i (3) kunna ekv. (7) och (5) skrifvas

(8) $$\begin{cases} \alpha_1(u) = a_{1,1}\beta_1(u) + a_{1,2}\beta_2(u), \\ \alpha_2(u) = a_{2,1}\beta_1(u) + a_{2,2}\beta_2(u), \quad (u = x, \ y; \ a_{1,2} = a_{2,1}). \end{cases}$$

Insättes systemet (8) i ekv. (1), satisfieras den identiskt.

Det är således bevisadt, att funktionalekv.

$$\sum_{\mu=1}^{2} \{\alpha_\mu(x)\beta_\mu(y) - \alpha_\mu(y)\beta_\mu(x)\} = 0$$

satisfieras identiskt och generellt af systemet (8). Solutionen är generell, enär systemet (8) under den gifna förutsättningen är en nödvändig följd af (1).

---

* Vi anmärka här en gång för alla, att vi i detta fall och öfverallt i det följande under bevisets gång ha rätt att dividera våra ekv. med vissa där förekommande funktionsuttryck, ty vore t. ex. här $B'_2(u) = 0$, så finge man $B'_2(u) =$ $=$ konstant $= -c$, och således blefve enligt (3) $\frac{\beta_2(u)}{\beta_1(u)} = -c$ eller $\beta_2(u) + c\beta_1(u)$ $= 0$, hvilket ju strider mot vår förutsättning, att ingen som helst lineär relation af formen $c_1\beta_1(u) + c_2\beta_2(u) + \ldots . c_n\beta_n(u) = 0$ får förefinnas.

För $n = 3$ ha vi att undersöka funktionalekv.

(9) $$\sum_{\mu=1}^{3} \{\alpha_\mu(x)\beta_\mu(y) - \alpha_\mu(y)\beta_\mu(x)\} = 0.$$

Divideras termerna i denna ekv. med $\beta_1(x)\beta_1(y)$, antar den formen

(10) $$\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} - \frac{\alpha_1(y)}{\beta_1(y)} + \frac{\alpha_2(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_2(y)}{\beta_1(y)} - \frac{\alpha_2(y)}{\beta_1(y)}\cdot\frac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)} + \frac{\alpha_3(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_3(y)}{\beta_1(y)} - \frac{\alpha_3(y)}{\beta_1(y)}\cdot\frac{\beta_3(x)}{\beta_1(x)} = 0.$$

Införa vi beteckningarna:

(11) $$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1(u)}{\beta_1(u)} = A_1(u), \\[2ex] \dfrac{\alpha_2(u)}{\beta_1(u)} = A_2(u), \quad \dfrac{\beta_2(u)}{\beta_1(u)} = B_2(u), \\[2ex] \dfrac{\alpha_3(u)}{\beta_1(u)} = A_3(u), \quad \dfrac{\beta_3(u)}{\beta_1(u)} = B_3(u), \quad (u = x,\ y), \end{cases}$$

så antar ekv. (10) formen

(12) $$A_1(x) - A_1(y) + A_2(x)B_2(y) - A_2(y)B_2(x) + A_3(x)B_3(y) - A_3(y)B_3(x) = 0.$$

Deriveras (12) med afseende på x och det så erhållna resultatet med afseende på y, erhålles

$$A'_2(x)B'_2(y) - A'_2(y)B'_2(x) + A'_3(x)B'_3(y) - A'_3(y)B'_3(x) = 0.$$

Emedan denna ekvation har samma form som ekv. (1), så satisfieras den af ett system, analogt med (8). Sistskrifna ekv. satisfieras således af systemet

$$A'_2(u) = a_{2,2}B'_2(u) + a_{2,3}B'_3(u),$$
$$A'_3(u) = a_{3,2}B'_2(u) + a_{3,3}B'_3(u), \quad (u = x,\ y;\ a_{3,2} = a_{2,3}).$$

Integreras detta system, så erhåller man

(13) $$\begin{cases} A_2(u) = a_{2,1} + a_{2,2}B_2(u) + a_{2,3}B_3(u), \\ A_3(u) = a_{3,1} + a_{3,2}B_2(u) + a_{3,3}B_3(u), \quad (u = x,\ y;\ a_{3,2} = a_{2,3}), \end{cases}$$

där $a_{2,1}$ och $a_{3,1}$ äro integrationskonstanter.

Insättas de uttryck vi fått på $A_2(x)$, $A_2(y)$, $A_3(x)$ och $A_3(y)$ ur (13) i (12), öfvergår denna efter en enkel reduktion till

$$A_1(x) - a_{2,1}B_2(x) - a_{3,1}B_3(x) = A_1(y) - a_{2,1}B_2(y) - a_{3,1}B_3(y).$$

Då x och y äro af hvarandra oberoende, följer häraf, att

$A_1(u) - a_{2,1}B_2(u) - a_{3,1}B_3(u) = a_{1,1}$, $(u = x,\ y;\ a_{1,1} =$ en konstant kvantite

Införa vi konstanterna $a_{1,2}$ och $a_{1,3}$ och fastslå, att $a_{1,2} = a_{2,1}$ och $a_{1,3} = a_{3,1}$, så får sistskrifna ekv. formen

(14) $$A_1(u) = a_{1,1} + a_{1,2}B_2(u) + a_{1,3}B_3(u).$$

Med iakttagande af beteckningarna i (10) öfvergå ekv. (13) och (14) i ekv.:

$$(15)\qquad \begin{cases} \alpha_1(u) = a_{1,1}\beta_1(u) + a_{1,2}\beta_2(u) + a_{1,3}\beta_3(u), \\ \alpha_2(u) = a_{2,1}\beta_1(u) + a_{2,2}\beta_2(u) + a_{2,3}\beta_3(u), \\ \alpha_3(u) = a_{3,1}\beta_1(u) + a_{3,2}\beta_2(u) + a_{3,3}\beta_3(u), \end{cases}$$

$$(u = x,\ y;\quad a_{1,2} = a_{2,1};\quad a_{1,3} = a_{3,1};\quad a_{2,3} = a_{3,2}).$$

Sistskrifna system kan sammanfattas i

$$\alpha_\mu(u) = \sum_{\nu=1}^{3} a_{\mu,\nu}\beta_\nu(u),\quad (u = x,\ y;\ a_{\nu,\mu} = a_{\mu,\nu};\ \mu = 1, 2, 3).$$

Insättes systemet (15) i ekv. (9), satisfieras den identiskt. Solutionen är generell, enär (15) under den gifna förutsättningen är en nödvändig följd af ekv. (9).

Vi kunna nu förmoda, att satsen är i allmänhet sann. Allmänt blir satsen bevisad, om vi, under antagande af att den gäller för funktionalekv.

$$\sum_{\mu=1}^{n-1} \{\alpha_\mu(x)\beta_\mu(y) - \alpha_\mu(y)\beta_\mu(x)\} = 0,$$

kunna ådagalägga, att den gäller för ekv.

$$(16)\qquad \sum_{\mu=1}^{n} \{\alpha_\mu(x)\beta_\mu(y) - \alpha_\mu(y)\beta_\mu(x)\} = 0.$$

Divideras termerna i ekv. (16) med $\beta_1(x)\beta_1(y)$, kan den skrifvas under formen

$$(17)\qquad \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} - \frac{\alpha_1(y)}{\beta_1(y)} + \sum_{\mu=2}^{n} \left\{ \frac{\alpha_\mu(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_\mu(y)}{\beta_1(y)} - \frac{\alpha_\mu(y)}{\beta_1(y)} \cdot \frac{\beta_\mu(x)}{\beta_1(x)} \right\} = 0.$$

Vi införa beteckningarna:

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha_1(u)}{\beta_1(u)} = A_1(u), \\ \dfrac{\alpha_\mu(u)}{\beta_1(u)} = A_\mu(u),\quad \dfrac{\beta_\mu(u)}{\beta_1(u)} = B_\mu(u),\quad (u = x, y;\ \mu = 2, 3 \ldots . n). \end{cases}$$

Ekv. (17) antar nu formen

$$(19)\qquad A_1(x) - A_1(y) + \sum_{\mu=2}^{n} \{A_\mu(x) B_\mu(y) - A_\mu(y) B_\mu(x)\} = 0.$$

Deriveras ekv. (19) med afseende på x, får man

$$A'_1(x) + \sum_{\mu=2}^{n} \{A'_\mu(x) B_\mu(y) - A_\mu(y) B'_\mu(x)\} = 0.$$

Häraf genom derivering med afseende på y:

$$\sum_{\mu=2}^{n} \{A'_\mu(x) B'_\mu(y) - A'_\mu(y) B'_\mu(x)\} = 0. \tag{20}$$

Sistskrifna ekv. har samma form som funktionalekv.

$$\sum_{\mu=1}^{n-1} \{\alpha_\mu(x) \beta_\mu(y) - \alpha_\mu(y) \beta_\mu(x)\} = 0,$$

och emedan vi antagit, att satsen gäller för denna form, satisfieras ekv. (20) således af systemet

$$A'_\mu(u) = \sum_{\nu=2}^{n} a_{\mu,\nu} B'_\nu(u), \quad (u = x,\, y;\ \mu = 2, 3 \ldots . n;\ a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}).$$

Integreras detta system, erhålles

$$A_\mu(u) = a_{\mu,1} + \sum_{\nu=2}^{n} a_{\mu,\nu} B_\nu(u), \quad (u = x,\, y;\ \mu = 2, 3 \ldots\ldots n;\ a_{\mu,\nu} = {}_{\nu,\mu}), \tag{21}$$

där $a_{\mu,1}$, ($\mu = 2, 3 \ldots\ldots n$), äro integrationskonstanter.

Insättas uttrycken på $A_\mu(x)$ och $A_\mu(y)$ ur (21) i (19), antar denna utseendet

$$A_1(x) - A_1(y) + \sum_{\mu=2}^{n} \{B_\mu(y)[a_{\mu,1} + \sum_{\nu=2}^{n} a_{\mu,\nu} B_\nu(x)] - B_\mu(x)\,[a_{\mu,1} + \sum_{\nu=2}^{n} a_{\mu,\nu}\, B_\nu(y)]\} = 0$$

eller

$$\left|\begin{aligned} &A_1(x) - \sum_{\mu=2}^{n} a_{\mu,1} B_\mu(x) - A_1(y) + \sum_{\mu=2}^{n} a_{\mu,1} B_\mu(y) + \\ &+ \sum_{\mu=2}^{n} \sum_{\nu=2}^{n} \{a_{\mu,\nu} B_\nu(x) B_\mu(y) - a_{\mu,\nu} B_\mu(x) B_\nu(y)\} = 0. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Men då

$$a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}, \quad (\mu = 2, 3 \ldots\ldots n;\ \nu = 2, 3 \ldots\ldots n),$$

måste således

$$\sum_{\mu=2}^{n} \sum_{\nu=2}^{n} \{a_{\mu,\nu} B_\nu(x) B_\mu(y) - a_{\mu,\nu} B_\mu(x) B_\nu(y)\} \text{ vara} = 0,$$

emedan två och två af termerna reduceras till noll.

Ekv. (22) kan nu skrifvas

$$A_1(x) - \sum_{\mu=2}^{n} a_{\mu,1} B_\mu(x) = A_1(y) - \sum_{\mu=2}^{n} a_{\mu,1} B_\mu(y).$$

Nödvändigt följer häraf, då variablerna x och y äro af hvarandra oberoende, att

(23) $$A_1(u) - \sum_{\mu=2}^{n} a_{\mu,1} B_\mu(u) = a_{1,1} = \text{en konstant kvantitet.}$$

Införa vi nu konstanterna $a_{1,\mu} (\mu = 2, 3 \ldots\ldots n)$, och fastställa, att $a_{1,\mu} = a_{\mu,1}$, så kan ekv. (23) skrifvas

(24) $$A_1(u) = a_{1,1} + \sum_{\mu=2}^{n} a_{1,\mu} B_\mu(u), \quad (u = x,\ y).$$

Iakttages nu beteckningarna i (18), kunna ekv. (24) och (21) sammanfattas i systemet

(25) $$\alpha_\mu(u) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} \beta_\nu(u), \quad (u = x,\ y;\ \mu = 1,\ 2 \ldots\ldots n;\ a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}).$$

Insättes systemet (25) i ekv. (16), satisfieras den identiskt. Solutionen är generell, emedan (25) under den gifna förutsättningen är en nödvändig följd af (16).

Satsen är nu allmänt bevisad, enär den är sann för $n = 2$.

Ett specialfall af denna sats, hvilket i det följande kommer att användas, få vi, om vi i ekv.

(26) $$\sum_{\mu=1}^{n} \{\alpha_\mu(x)\beta_\mu(y) - \alpha_\mu(y)\beta_\mu(x)\} = 0$$

ponera $\beta_1(x) = 1$ och således också $\beta_1(y) = 1$.

Ekv. (26) öfvergår då till

(27) $$\alpha_1(x) - \alpha_1(y) + \sum_{\mu=2}^{n} \{\alpha_\mu(x)\beta_\mu(y) - \alpha_\mu(y)\beta_\mu(x)\} = 0.$$

Denna ekv. satisfieras identiskt och generellt af systemet (25), om vi där ponera $\beta_1(u) = 1$; således af systemet

(28) $$\alpha_\mu(u) = a_{\mu,1} + \sum_{\nu=2}^{n} a_{\mu,\nu} \beta_\nu(u), \quad (u = x,\ y;\ \mu = 1, 2 \ldots\ldots n;\ a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}),$$

under förutsättning af att ingen som helst lineär relation af formen

(28 b) $$c_1 + c_2\beta_2(u) + \ldots\ldots c_n\beta_n(u) = 0 \text{ förefinnes.}$$

Anm. 1. Förefinnas lineära relationer mellan β-funktionerna, satisfieras i alla händelser ekv. (26) identiskt af systemet (25). Vi få således under alla förhållanden tillämpa satsen. Vilja vi äfven i det fall, att lineära relationer förefinnas mellan β-funktionerna, ha en generell solution, måste vi med betjänande af de lineära relationerna omskrifva den ursprungliga funktionalekv.

Anm. 2 Enär beviset ej förutsätter kännedom om funktionernas entydighet eller flertydighet, gäller satsen, vare sig funktionerna äro entydiga eller flertydiga.

2.

Härledning af de funktioner F, φ och ψ, som satisfiera funktionalekvationen

$$F(x+y)=\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{\psi(x)+\psi(y)}, \tag{29}$$

där variablerna x och y äro af hvarandra oberoende.

Deriveras ekv. (29) logaritmiskt med afseende på x, erhålles

$$\frac{F'(x+y)}{F(x+y)}=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)+\varphi(y)}-\frac{\psi'(x)}{\psi(x)+\psi(y)}. \tag{30}$$

Permuteras x och y i ekv. (30), fås

$$\frac{F'(x+y)}{F(x+y)}=\frac{\varphi'(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}-\frac{\psi'(y)}{\psi(x)+\psi(y)}. \tag{31}$$

Ur ekv. (30) och (31) följer nu omedelbart, att

$$\frac{\varphi'(x)-\varphi'(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}-\frac{\psi'(x)-\psi'(y)}{\psi(x)+\psi(y)}=0,$$

och häraf erhålles

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)-[\varphi'(y)\psi(y)-\varphi(y)\psi'(y)]+\\ +[-\psi'(x)]\varphi(y)-[-\psi'(y)]\varphi(x)+\varphi'(x)\psi(y)-\varphi'(y)\psi(x)=0.\end{array}\right. \tag{32}$$

Sätter man nu

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi'(u)\psi(u)-\varphi(u)\psi'(u)=\alpha_1(u),\\ -\psi'(u)=\alpha_2(u),\quad \varphi(u)=\beta_2(u),\\ \varphi'(u)=\alpha_3(u),\quad \psi(u)=\beta_3(u),\quad (u=x,\,y),\end{array}\right. \tag{33}$$

så kan ekv. (32) skrifvas

$$\alpha_1(x)-\alpha_1(y)+\sum_{\mu=2}^{3}\{\alpha_\mu(x)\beta_\mu(y)-\alpha_\mu(y)\beta_\mu(x)\}=0.$$

Denna funktionalekv. har samma form som ekv. (27). Vi få då enligt (28), om vi iakttaga beteckningarna i (33),

$$(34)\qquad \begin{cases} \varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x) = a_{1,1} + a_{1,2}\varphi(x) + a_{1,3}\psi(x), \\ -\psi'(x) = a_{2,1} + a_{2,2}\varphi(x) + a_{2,3}\psi(x), \\ \varphi(x) = a_{3,1} + a_{3,2}\varphi(x) + a_{3,3}\psi(x), \end{cases}$$

där $a_{2,1} = a_{1,2}$, $a_{3,1} = a_{1,3}$, $a_{3,2} = a_{2,3}$*.

I stället för de indicerade bokstäfverna införa vi

$a = a_{1,1}$, $b = a_{1,2} = a_{2,1}$, $c = a_{1,3} = a_{3,1}$, $d = a_{2,2}$, $e = a_{2,3} = a_{3,2}$, $f = a_{3,3}$.

Systemet 34 kan nu skrifvas

$$(35\,a)\qquad \varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x) = a + b\varphi(x) + c\psi(x),$$

$$(35\,b)\qquad -\psi'(x) = b + d\varphi(x) + e\psi(x),$$

$$(35\,c)\qquad \varphi'(x) = c + e\varphi(x) + f\psi(x).$$

Om uttrycket för $\psi'(x)$ och $\varphi'(x)$, hämtade ur (35b) och (35c), insättas i (35a), öfvergår systemet (35) i

$$(36\,a)\qquad d\varphi^2(x) + f\psi^2(x) + 2e\varphi(x)\psi(x) = a,$$

$$(36\,b) = (35\,c)\qquad \varphi'(x) = c + e\varphi(x) + f\psi(x),$$

$$(36\,c) = (35\,b)\qquad -\psi'(x) = b + d\varphi(x) + e\psi(x).$$

Det synes tydligt, att ekv. (36) icke kunna vara oberoende af hvarandra. En af dem måste vara en nödvändig följd af de båda andra. Deriveras (36a) med afseende på x, får man

$$\varphi'(x)\{d\varphi(x) + e\psi(x)\} + \psi'(x)\{f\psi(x) + e\varphi(x)\} = 0.$$

Skall nu denna ekv. vara en omedelbar följd af ekv. (36b) och (36c), blir i dessa

$$b = 0 \text{ och } c = 0.$$

Systemet (36) öfvergår nu i

$$(37\,a)\qquad d\varphi^2(x) + f\psi^2(x) + 2e\varphi(x)\psi(x) = a,$$

$$(37\,b)\qquad \varphi'(x) = e\varphi(x) + f\psi(x),$$

$$(37\,c)\qquad -\psi'(x) = d\varphi(x) + e\psi(x),$$

och här veta vi, att en, hvilken som helst, af dessa ekvationer är en nödvändig följd af de båda andra.

---

* Solutionen (34) är generell, ifall ingen lineär ralation $c_1 + c_2\varphi(x) + c_3\varphi(x) = 0$ förefinnes (se villkorsekv. 28b). Förefinnes en sådan relation kan funktionalekv. (29) öfverföras till en annan form, men lösningen af den erbjuder intet af intresse.

Elimineras $\psi(x)$ ur (37b) medels (37a) och vidare $\varphi(x)$ ur (37c) medels (37a), så kan systemet (37) skrifvas

(38a) $$d\varphi^2(x)+f\psi^2(x)+2e\varphi(x)\psi(x)=a,$$

(38b) $$\varphi'^2(x)=af+(e^2-fd)\varphi^2(x),$$

(38c) $$\psi'^2(x)=ad+(e^2-fd)\psi^2(x).$$

Funktionalekv. (29) satisfieras således af de genom systemet (38) definierade funktionerna, och F-funktionen, definierad som den är genom ekv. (29), blifver känd, då φ- och ψ-funktionen är känd. Vår uppgift skulle nu kunna anses generellt besvarad. Likväl kan man gå längre och uppvisa fundamentalegenskaper hos φ- och ψ-funktionen. Vi göra detta för ett *specialfall* i akt och mening att på denna väg komma åt fundamentalegenskaper hos det cirkulära funktionssystemet, sinus- och cosinus-funktionen, för att sedan i nästa kapitel genom ett *likartadt* förfaringssätt framtaga fundamentalegenskaper hos ett analogt system elliptiska funktioner.

Vi sätta

$$a=d=f=1,\ e=0$$

och teckna dessutom i detta specialfall $\varphi(x)$ med symbolen $s(x)$ och $\psi(x)$ med symbolen $c(x)$. Systemet (38) samt ekv. (37b) och (37c) öfvergå nu i ekv.:

(39a) $$s^2(x)+c^2(x)=1,$$

(39b) $$s'^2(x)=1-s^2(x),$$

(39c) $$c'^2(x)=1-c^2(x),$$

(39d) $$s'(x)=c(x),$$

(39e) $$c'(x)=-s(x).$$

För att närmare bestämma s- och c-funktionen antaga vi, att

(40a) $$s(o)=0,\ c(o)=1,$$

ett antagande, som ekv. (39a) tillåter oss att göra. Af (39d) och (39e) följer nu, att

(40b) $$s'(o)=1,\ c'(o)=0.$$

Af $s'(o)=1$ förstå vi, att funktionerna ej kunna vara konstanter.

För att erhålla additionsteoremet för s-funktionen sätta vi i ekv. (31) $y=0$. Denna ekv. öfvergår, då vi taga hänsyn till bestämningarna i (40a) och (40b) och erinra oss, att vi hädanefter skrifva $s(x)$ i stället för $\varphi(x)$ och $c(x)$ i stället för $\psi(x)$, i

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{1}{s(x)},$$

och följaktligen kan ekv. (31) skrifvas

(41) $$\frac{1}{s(x+y)}=\frac{s'(y)}{s(x)+s(y)}-\frac{c'(y)}{c(x)+c(y)}.$$

Införas i (41) uttrycken för $s'(y)$ och $c'(y)$, hämtade ur (39 d) och (39 e), och betjäna vi oss af formeln (39 a), erhåller man

(42) $$s(x+y)=\frac{\{s(x)+s(y)\}\{c(x)+c(y)\}}{1+s(x)\,s(y)+c(x)\,c(y)}.$$

Erinra vi oss, att enligt (39 a)

$$s^2(u)+c^2(u)=1,$$

så fås

$$\{s(x)+s(y)\}\{c(x)+c(y)\}=s(x)c(x)+s(y)c(y)+s(x)c(y)+s(y)c(x)=$$
$$=s(x)c(x)\{s^2(y)+c^2(y)\}+s(y)c(y)\{s^2(x)+c^2(x)\}+s(x)c(y)+s(y)\,c(x)=$$
$$=\{s(x)c(y)+s(y)c(x)\}\{1+s(x)s(y)+c(x)c(y)\}.$$

Additionsteoremet för $s(x)$, representeradt af formeln (42), kan följaktligen omformas i

(43) $$s(x+y)=s(x)c(y)+s(y)c(x).$$

Deriveras (43) med afseende på x och betjäna vi oss af (39 d) och (39 e), fås c-funktionens additionsteorem

(44) $$c(x+y)=c(x)c(y)-s(x)s(y).$$

Af ekv. (42) följer, om vi sätta $y=-x$, att

$$\{s(x)+s(-x)\}\{c(x)+c(-x)\}=0.$$

Faktorn $\{c(x)+c(-x)\}$ kan icke för hvarje x-värde vara noll, ty för $x=0$ blifver denna enligt (40 a) $=2$.

Följaktligen är

$$s(x)+s(-x)=0,$$

hvaraf

$$s(-x)=-s(x).$$

Deriveras denna, erhålles

$$s'(-x)=s'(x)$$

eller enligt (39 d)

$$c(-x)=c(x).$$

s-funktionen är således en udda funktion och c-funktionen en jämn sådan. Att s-funktionen växer, då argumentet genomlöper en positiv värdesträcka från nollpunkten, ses af (39 d). Att detta växande har en gräns och att maximivärdet på $s(x)$ blifver $=1$, ses af (39 b).

Vi kunna nu sätta

$$s(\omega)=1,$$

där ω är en positiv kvantitet.

Följaktligen är enligt (39 a)

$$c(\omega)=0.$$

Sättes $y = \omega$ i (43) och (44), erhålles

$$s(x+\omega) = c(x),$$

$$c(x+\omega) = -s(x).$$

Häraf

$$s(x+2\omega) = -s(x),$$

$$c(x+2\omega) = -c(x),$$

och slutligen

$$s(x+4\omega) = s(x),$$

$$c(x+4\omega) = c(x).$$

s- och c-funktionen äro således periodiska och 4ω utgör perioden.

Enär s-funktionen växer, då argumentet genomlöper en positiv värdesträcka från nollpunkten till ω, så erhålles af (39 b)

$$(46) \qquad \int_0^\omega dx = \int_0^\omega \frac{s'(x)\,dx}{\sqrt{1-s^2(x)}}.$$

När x genomlöper den positiva sträckan från 0 till ω, genomlöper $s(x)$ enligt det föregående en positiv värdesträcka från 0 till 1. Införes $u = s(x)$, fås således ur (46)

$$\omega = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

ω kan härur beräknas, och perioden 4ω blir följaktligen bekant.

Skulle den anmärkningen göras mot sistskrifna uttryck för ω, att det är diskontinuerligt för $u = 1$, så kan lätt ett annat uttryck erhållas för ω, där integralen är kontinuerlig mellan och för gränserna.

Ur (39 b) erhålles

$$\int_0^{\frac{\omega}{2}} dx = \int_0^{\frac{\omega}{2}} \frac{s'(x)\,dx}{\sqrt{1-s^2(x)}}.$$

Införes $u = s(x)$, fås

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^{s\left(\frac{\omega}{2}\right)} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Ur (43) och (44) kan $s\left(\frac{\omega}{2}\right)$ beräknas. Vi få $s\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och således

$$\omega = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Ha vi en differentialekv. af formen

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - y^2,$$

så satisfieras den generellt af $y = s(x + c)$, där c är en arbiträr konstant.

En närmare undersökning af s- och c-funktionen är obehöflig, då de påtagligen sammanfalla med sinus- och cosinus-funktionen. Vi ha nu i detta exempel angifvit den väg, som vi ämna följa vid behandlingen af följande intressanta funktionalekvation.

3.

Härledning af de funktioner F, f, φ och ψ, hvilka satisfiera funktionalekvationen

$$F(x+y)=f(x)f(y)\cdot\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{\psi(x)+\psi(y)}, \tag{47}$$

där variablerna x och y äro af hvarandra oberoende.

Deriveras ekv. (47) logaritmiskt med afseende på x, fås

$$\frac{F'(x+y)}{F(x+y)}=\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)+\varphi(y)}-\frac{\psi'(x)}{\varphi(x)+\varphi(y)}. \tag{48}$$

Permuteras x och y i sistskrifna ekv., erhålles

$$\frac{F'(x+y)}{F(x+y)}=\frac{f'(y)}{f(y)}+\frac{\varphi'(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}-\frac{\psi'(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}. \tag{49}$$

Af (48) och (49) följer omedelbart, att

$$\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{f'(y)}{f(y)}+\frac{\varphi'(x)-\varphi'(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}-\frac{\psi'(x)-\psi'(y)}{\psi(x)+\psi(y)}=0.$$

Häraf erhålles

$$\left|\begin{aligned}
&\frac{f'(x)}{f(x)}\varphi(x)\psi(x)+\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)-\\
&-\left\{\frac{f'(y)}{f(y)}\varphi(y)\psi(y)+\varphi'(y)\psi(y)-\varphi(y)\psi'(y)\right\}+\\
&+\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\psi(x)-\psi'(x)\right\}\varphi(y)-\left\{\frac{f'(y)}{f(y)}\psi(y)-\psi'(y)\right\}\varphi(x)+\\
&+\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\varphi(x)+\varphi'(x)\right\}\psi(y)-\left\{\frac{f'(y)}{f(y)}\varphi(y)+\varphi'(y)\right\}\psi(x)+\\
&+\frac{f'(x)}{f(x)}\varphi(y)\psi(y)-\frac{f'(y)}{f(y)}\varphi(x)\psi(x)=0.
\end{aligned}\right. \tag{50}$$

Sätter man

$$\frac{f'(u)}{f(u)}\varphi(u)\psi(u)+\varphi'(u)\psi(u)-\varphi(u)\psi'(u)=\alpha_1(u)$$

$$\frac{f'(u)}{f(u)}\psi(u)-\psi'(u)=\alpha_2(u), \qquad \varphi(u)=\beta_2(u)$$

$$\frac{f'(u)}{f(u)}\varphi(u)+\varphi'(u)=\alpha_3(u), \qquad \psi(u)=\beta_3(u)$$

$$\frac{f'(u)}{f(u)}=\alpha_4(u), \qquad \varphi(u)\psi(u)=\beta_4(u), \ (u=x, y),$$

så kan ekv. (50) skrifvas

$$\alpha_1(x)-\alpha_1(y)+\sum_{\mu=2}^{4}\{\alpha_\mu(x)\beta_\mu(y)-\alpha_\mu(y)\beta_\mu(x)\}=0.$$

Denna funktionalekv. har samma form som ekv. (27). Vi få då enligt (28), om vi aktgifva på beteckningarna i (51), följande ekv.:

$$(52)\quad\begin{cases}\frac{f'(x)}{f(x)}\varphi(x)\psi(x)+\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)=a_{1,1}+a_{1,2}\varphi(x)+a_{1,3}\psi(x)+a_{1,4}\varphi(x)\psi(x).\\ \frac{f'(x)}{f(x)}\psi(x)-\psi'(x)=a_{2,1}+a_{2,2}\varphi(x)+a_{2,3}\psi(x)+a_{2,4}\varphi(x)\psi(x).\\ \frac{f'(x)}{f(x)}\varphi(x)+\varphi'(x)=a_{3,1}+a_{3,2}\varphi(x)+a_{3,3}\psi(x)+a_{3,4}\varphi(x)\psi(x).\\ \frac{f'(x)}{f(x)}=a_{4,1}+a_{4,2}\varphi(x)+a_{4,3}\psi(x)+a_{4,4}\varphi(x)\psi(x),\end{cases}$$

där $a_{\mu,\nu}=a_{\nu,\mu}(\mu=1, 2, 3, 4;\ \nu=1, 2, 3, 4)$*.

I stället för de indicerade bokstäfverna införa vi

$$a=a_{1,1},\ b=b_{1,2}=a_{2,1},\ c=a_{1,3}=a_{3,1},\ d=a_{1,4}=a_{4,1},\ e=a_{2,2},\ f=a_{2,3}=a_{3,2},$$
$$g=a_{2,4}=a_{4,2},\ h=a_{3,3},\ l=a_{3,4}=a_{4,3},\ m=a_{4,4}.$$

Systemet (52) kan nu skrifvas:

(53a) $$\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\varphi(x)\psi(x)+\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\cdot\psi'(x)=a+b\varphi(x)+c\psi(x)+d\varphi(x)\psi(x),$$

(53b) $$\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\psi(x)-\psi'(x)=b+e\varphi(x)+f\psi(x)+g\varphi(x)\psi(x).$$

(53c) $$\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\varphi(x)+\varphi'(x)=c+f\varphi(x)+h\psi(x)+l\varphi(x)\psi(x).$$

(53d) $$\frac{f'(x)}{f(x)}=d+g\varphi(x)+l\psi(x)+m\varphi(x)\psi(x).$$

---

* Solutionen (52) är generell, om ingen lineär relation $c_1+c_2\varphi+c_3\psi+c_4\varphi\psi=0$ förefinnes (se villkorsekv. 28 b). Förefinnes en sådan relation, kan (47) öfverföras till en annan form, men lösningen af den erbjuder intet af intresse.

Om uttrycket för $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ ur (53e) insättes i (53a), (53b) och (53c), öfvergår systemet (53) i

$$(54\text{a})\quad \varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)=a+b\varphi(x)+c\psi(x)-g\varphi^2(x)\psi(x)-l\varphi(x)\psi^2(x)-m\varphi^2(x)\psi^2(x).$$

$$(54\text{b})\qquad -\psi'(x) \quad = b+e\varphi(x)+(f-d)\psi(x)-l\psi^2(x)-m\varphi(x)\psi^2(x).$$

$$(54\text{c})\qquad \varphi'(x) \quad = c+(f-d)\varphi(x)+h\psi(x)-g\varphi^2(x)-m\varphi^2(x)\psi(x).$$

$$(54\text{d})\qquad \frac{f'(x)}{f(x)} \quad = d+g\varphi(x)+l\psi(x)+m\varphi(x)\psi(x).$$

Om uttrycket för $\psi'(x)$ och $\varphi'(x)$, hämtade ur (54b) och (54c), insättas i (54a), öfvergår systemet (54) i

$$(55\text{a})\qquad e\varphi^2(x)+h\psi^2(x)+2(f-d)\varphi(x)\psi(x)-m\varphi^2(x)\psi^2(x)=a,$$

$$(55\text{b})=(54\text{c})\qquad \varphi'(x)=c+(f-d)\varphi(x)+h\psi(x)-g\varphi^2(x)-m\varphi^2(x)\psi(x),$$

$$(55\text{c})=(54\text{b})\qquad -\psi'(x)=b+c\varphi(x)+(f-d)\psi(x)-l\psi^2(x)-m\varphi(x)\psi^2(x),$$

$$(55\text{d})\qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=d+g\varphi(x)+l\psi(x)+m\varphi(x)\psi(x).$$

Tydligt är, att de tre första ekv. i syst. (55) icke kunna vara oberoende af hvarandra. En af dem måste vara en nödvändig följd af de båda andra.

Deriveras (55a) med afseende på x, erhålles

$$\varphi'(x)\{e\varphi(x)+(f-d)\psi(x)-m\varphi(x)\psi(x)\}+\psi'(x)\{(f-d)\varphi(x)+$$
$$+h\psi(x)-m\varphi^2(x)\psi(x)\}=0.$$

Skall nu denna ekv. vara en omedelbar följd af ekv. (55b) och (55c), blir i dessa ekv.

$$b=e=g=l=0.$$

Systemet (55) öfvergår nu i

$$(56\text{a})\qquad e\varphi^2(x)+h\psi^2(x)+2(f-d)\varphi(x)\psi(x)-m\varphi^2(x)\psi^2(x)=a.$$

$$(56\text{b})\qquad \varphi'(x)=(f-d)\varphi(x)+h\psi(x)-m\varphi^2(x)\psi(x).$$

$$(56\text{c})\qquad -\psi'(x)=e\varphi(x)+(f-d)\psi(x)-m\varphi(x)\psi^2(x).$$

$$(56\text{d})\qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=d+m\varphi(x)\psi(x).$$

Löses (56b) med afseende på $\psi(x)$ och insättes detta värde i (56a) och löses sedan (56c) med afseende på $\varphi(x)$ och insättes uttrycket för detta i (56a), så kan systemet (56) skrifvas

$$(57\text{a})\qquad e\varphi^2(x)+h\psi^2(x)+2(f-d)\varphi(x)\psi(x)-m\varphi^2(x)\psi^2(x)=a.$$

$$(57\text{b})\qquad \varphi'^2(x)=(f-d)^2\varphi^2(x)+\{a-e\varphi^2(x)\}\{h-m\varphi^2(x)\}.$$

$$(57\text{c})\qquad \psi'^2(x)=(f-d)^2\psi^2(x)+\{a-h\psi^2(x)\}\{e-m\psi^2(x).$$

$$(57\text{d})\qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=d+m\varphi(x)\psi(x).$$

Vår funktionalekv. (47) satisfieras således generellt af de genom systemet (56) eller (57) definierade funktionerna*.

Det intressantaste härvid är emellertid, att man kan drifva undersökningen af dessa funktioner vida längre, och vi skola nu i det syfte, som betonades på sidan 11, för ett *specialfall* härleda fundamentalegenskaper hos de i detta problem uppträdande funktionerna φ och ψ.

Vi sätta

$$d=0,\ (f-d)=0,\ a=e=h=1,\ m=k^2$$

och införa dessutom i detta specialfall beteckningen $S(x)$ i st. f. $\varphi(x)$ och $C(x)$ i st. f. $\psi(x)$.

Systemet (57) samt ekv. (56 b) och (56 c) öfvergå nu i

(58 a) $$S^2(x)+C^2(x)-k^2S^2(x)C^2(x)=1 \text{ eller}$$
$$\{1-k^2S^2(x)\}\{1-k^2C^2(x)\}=1-k^2$$

(58 b) $$S'^2(x)=\{1-S^2(x)\}\{1-k^2S^2(x)\}$$

(58 c) $$C'^2(x)=\{1-C^2(x)\}\{-k^2C^2(x)\}$$

(58 d) $$\frac{f'(x)}{f(x)}=k^2S(x)C(x)$$

(58 e) $$S'(x)=C(x)\{1-k^2S^2(x)\}$$

(58 f) $$C'(x)=-S(x)\{1-k^2C^2(x)\}$$

Af (58 b) och (58 c) se vi, att S- och C-funktionen framgå ur en differentialekv. af alldeles samma form. Jämför med afseende härpå ekv. (39 b) och (39 c).

För att närmare bestämma S- och C-funktionen antaga vi, att

(59 a) $$S(o)=0,\ C(o)=1,$$

ett antagande, som ekv. (58 a) tillåter oss att göra.

Af ekv. (58 e), (58 f) och (58 d) följer nu, att

(59 b) $$S'(o)=1,\ C'(o)=0,\ \frac{f'(o)}{f(o)}=0.$$

Af $S'(o)=1$ förstå vi, att funktionerna ej kunna öfvergå i konstanter.

Additionsteoremet för S-funktionen härleda vi ur ekv. (49) och sätta för den skull $y=0$ i denna ekv. Då erhålles, om vi taga hänsyn till (59 a) och (59 b) och erinra oss, att vi hädanefter skrifva $S(x)$ i st. f. $\varphi(x)$ och $C(x)$ i st. f. $\psi(x)$,

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{1}{S(x)},$$

och följaktligen kan ekv. (49) skrifvas

(60) $$\frac{1}{S(x+y)}=\frac{f'(y)}{f(y)}+\frac{S'(y)}{S(x)+S(y)}-\frac{C'(y)}{C(x)+C(y)}.$$

---

* Jag anmärker här, att man således medels denna metod alltid kommer fram till differentialekv., hvilka innehålla en fullständig lösning af additionsteoremen.

Införas i (60) uttrycken för $\frac{f'(y)}{f(y)}$, $S'(y)$ och $C'(y)$, hämtade respektive ur (58d), (58e) och (58f), så kan denna ekv., om vi dessutom betjäna oss af (58a), skrifvas

(61) $$S(x+y) = \frac{\{S(x)+S(y)\}\{C(x)+C(y)\}}{1+S(x)S(y)+C(x)C(y)+k^2S(x)S(y)C(x)C(y)}.$$

Af ekv. (61) följer, om vi sätta $y = -x$ och begagna oss af (59a), att

$$\{S(x)+S(-x)\}\{C(x)+C(-x)\} = 0.$$

Faktorn $\{C(x)+C(-x)\}$ kan ej för hvarje x-värde vara lika med 0, ty för $x = 0$ blifver den 2 (enligt 59a). Följaktligen är

$$\{S(x)+S(-x)\} = 0,$$

och häraf erhålles

(62a) $$S(-x) = -S(x).$$

Deriveras denna, erhåller man

$$S'(-x) = S'(x)$$

eller enligt (58e) och (63a)

(62b) $$C(-x) = C(x).$$

S-funktionen är således en udda funktion och C-funktionen en jämn sådan.

Additionsteoremet (61) kan betydligt förenklas. För att lättare kunna öfverskåda den transformation, som är erforderlig, införa vi beteckningen

$$P = \{S(x)+S(y)\}\{C(x)+C(y)\}$$

och få

$$P = S(x)C(y)+S(y)C(x)+S(x)C(x)+S(y)C(y)$$

eller med användande af (58a)

$$\begin{aligned} P = {} & S(x)C(y)+S(y)C(x)+S(x)C(x)\{S^2(y)+C^2(y)-k^2S^2(y)C^2(y)\}+ \\ & +S(y)C(y)\{S^2(x)+C^2(x)-k^2S^2(x)C^2(x)\} = \\ & = \{S(x)C(y)+S(y)C(x)\}+S(x)S(y)\{S(x)C(y)+S(y)C(x)\}+ \\ & +C(x)C(y)\{S(x)C(y)+S(y)C(x)\}+k^2S(x)S(y)C(x)C(y)\{S(x)C(y)+S(y)C(x)\} \\ & -k^2S(x)S(y)C(x)C(y)\{S(x)+S(y)\}\{C(x)+C(y)\}. \end{aligned}$$

Följaktligen

$$\begin{aligned} P = {} & \{S(x)C(y)+S(y)C(x)\}\{1+S(x)S(y)+C(x)C(y)+k^2S(x)S(y)C(x)C(y)- \\ & -k^2S(x)S(y)C(x)C(y)P. \end{aligned}$$

Löses sistskrifna ekv. med afseende på P, fås

$$P = \frac{\{S(x)C(y)+S(y)C(x)\}\{1+S(x)S(y)+C(x)C(y)+k^2S(x)S(y)C(x)C(y)\}}{1+k^2S(x)S(y)C(x)C(y)}.$$

Nu kan additionsformeln (61) omformas till

(63) $$S(x+y) = \frac{S(x)C(y)+S(y)C(x)}{1+k^2S(x)S(y)C(x)C(y)}.$$

Detta additionsteorem är analogt med sinus-funktionens och sammanfaller därmed, om $k = 0$.

C-funktionens additionsteorem skulle man kunna härleda ur (63) medels derivering. Räkningen blir dock besvärlig. Lättast härledes detta additionsteorem, om vi först göra det speciella antagandet rörande k, att *k är en positiv kvantitet och < 1 och således också $k^2 < 1$*, och sedan uppvisa, att det så erhållna additionsteoremet är giltigt, äfven om k är en komplex kvantitet.

På grund af nyssnämnda antagande rörande k finner man af (58 e), att S-funktionen *växer*, då argumentet genomlöper *en viss positiv värdesträcka från nollpunkten*. Att detta växande har en gräns och att maximivärdet på $S(x)$ blifver 1, ses af (58 b).

Vi kunna således sätta

$$S(K) = 1,$$

där K är en positiv kvantitet, och häraf enligt (58 a)

$$C(K) = 0.$$

Sättes $y = K$ i (63), får man

(64) $$S(x + K) = C(x), \text{ häraf}$$

$$S(2K) = 0.$$

Ur (63) fås vidare

(65) $$S(x + 2K) = S(x)\,C(2K), \text{ häraf}$$

$$S(K) = S(-K)\,C(2K), \text{ häraf enligt (62 a)}$$

$$C(2K) = -1, \text{ och (65) öfvergår i}$$

$$S(x + 2K) = -S(x), \text{ hvaraf enligt (64)}$$

(66) $$C(x + K) = -S(x).$$

Skrifver man nu i (62) $x + K$ i st. f. x, erhåller man med begagnande af (64) och (66) C-funktionens additionsteorem

(67) $$C(x + y) = \frac{C(x)\,C(y) - S(x)\,S(y)}{1 - k^2 S(x)\,S(y)\,C(x)\,C(y)}.$$

Detta additionsteorem är analogt med cosinus-funktionens och sammanfaller därmed, om $k = 0$.

Att detta additionsteorem gäller oberoende af föregående antagande rörande k, finner man af följande: ur (63) kan man medels derivering härleda ett generellt additionsteorem; skall detta additionsteorem kunna bringas i öfverensstämmelse med (67), som gäller för ett *variabelt* k, ehuru positivt och < 1, så måste dessa additionsteorem ha *samma* form. Ur (63) och (67) framgå, då vi betjäna oss af (63 a) och (63 b), följande formler:

(68) $$\begin{cases} S(x - y) = \dfrac{S(x)\,C(y) - S(y)\,C(x)}{1 - k^2 S(x)\,S(y)\,C(x)\,C(y)}, \\[2ex] C(x - y) = \dfrac{C(x)\,C(y) + S(x)\,S(y)}{1 + k^2 S(x)\,S(y)\,C(x)\,C(y)}. \end{cases}$$

I det följande fasthålla vi vid antagandet, att k är en positiv kvantitet och < 1. Ur realsynpunkt är detta fasthållande berättigadt, enär, som bekant, andra fall, då k är reellt, kunna hänföras till detta*.

* Den generella ($k =$ komplex kvantitet) och således rent formella behandlingen af föreliggande uppgift står i närmaste sammanhang med den speciella ($k =$ en positiv kvantitet och < 1).

Äfven med fara att anses göra en olämplig digression från ämnet, kan jag dock icke underlåta att framhålla, till hvilka formella öfverdrifter en genomgående formell analytisk behandling af matematiken enligt mitt förmenande kan föra, då man icke stöder sig på i erfarenheten gifna allmänna räknelagar. Såsom exempel härpå vill jag anföra Weierstrass' »Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Grössen», Göttingen 1884. Man skulle häraf kunna förmoda, att man i aritmetiken kunde införa andra entydiga räknesymboler än de lineärt och således entydigt definierbara positiva och negativa kvantiteterna. Omöjligheten häraf torde framgå ur följande motivering:

Till entydiga bestämningar sträfvar man öfverallt i matematiken af det skäl, att matematikens mål är att ge form åt sådana företeelser i rum och tid, som behärskas af nödvändiga lagar, och hvarje sådan lag är entydig. Det ges emellertid en symbol i aritmetiken, som aldrig kan entydigt bestämmas, nämligen den s. k. imaginära enheten, hvilken, såsom namnet antyder, blott är en inbillad enhet. Vore symbolen i en verklig matematisk *enhet,* måste den vara *entydig,* och är den entydig, måste den kunna genom en lineär ekvation definieras. Nu kan den emellertid definieras *endast* medels en andra grads ekvation. Följaktligen är i en tvåtydig räknesymbol, hvars formellt positiva definitionsekv. är $i^2 = -1$. Sant är, att den i öfverensstämmelse med hvarje annan flertydig räknesymbol i hvarje moment måste tänkas ha *ett* värde, men ett, *hvilket som helst,* af de två värden, som den på grund af sin definition måste äga. Att denna symbol är tvåtydig, framgår af Biermanns här förut anförda arbete, där det på sidan 47 heter: »Unter i selbst kann man die positive oder negative Wurzel aus -1 verstehen». Men hvad Biermann menar med en positiv och en negativ rot ur -1, förstår jag ej, enär man med en positiv rot menar ett positivt tal och med en negativ rot ett negativt tal, men några positiva och negativa tal kunna ej satisfiera formen $i^2 = -1$. Vi äro således ej i stånd att lineärt definiera två entydiga symboler, hvarmedels vi kunde entydigt bestämma den tvåtydiga symbolen i, om man, som sig bör, fasthåller den fordran på en definition, att det, som obekant är, skall definieras medels något, som redan bekant är. De enda räknesymboler, som kunna lineärt och således entydigt definieras, äro de positiva och negativa kvantiteterna, och det är därför, som vi kunna entydigt bestämma t. ex. den tvåtydiga symbolen h, som framgår ur ekv. $h^2 = 1$. Om man i matematisk form klädt en uppgift och man sedan söker någon *entydig* lösning af denna, men får till svar en form, däri den *icke-entydigt* bestämbara symbolen i med nödvändighet ingår, så måste denna uppgift vara orimlig, hvadan man inser, att symbolen i är symbolen för det i real mening orimliga.

Gäller nu detta om den imaginära enheten, att den således icke är någon enhet, så ställer sig saken ännu värre med afseende på de i »Zur Theorie etc.» införda »enheterna». Weierstrass tänker sig formellt en i *erfarenheten* gifven *allmän aritmetisk* räknelag upphäfd: han anser, att produkten af två »tal» kan vara noll, utan att *någon* faktor är noll, och inför s. k. »Theiler der Null». Formellt kan man nog tänka sig saken, ty formellt kan man tänka sig hvad som helst.

Med samma rätt kan man formellt tänka sig alla i erfarenheten gifna *all-*

Af (64) och (66) fås

$$S(x+2K) = -S(x),$$
$$C(x+2K) = -C(x),$$

och häraf

$$S(x+4K) = S(x),$$
$$C(x+4K) = C(x).$$

S- och C-funktionen hafva således perioden $4K$.

Af våra formler framgår nu otvetydigt, att

$$S(2mK) = 0,$$

(m ett pos. el. neg. helt tal el. 0) och att inga andra reella argumentvärden kunna göra $S(x)$ lika med noll.

Enär S-funktionen växer, då argumentet genomlöper en positiv sträcka från 0 till K, så fås ur (58b), att

$$(69) \qquad \int_0^K dx = \int_0^K \frac{S'(x)\,dx}{\sqrt{\{1-S^2(x)\}\{1-k^2S^2(x)\}}}.$$

När x genomlöper den positiva värdesträckan från 0 till K, genomlöper $S(x)$ en positiv sträcka från 0 till 1.

---

männa räknelagar upphäfda. Men då jagar man efter tomma tankeformer, i hvilka intet innehåll kan inpressas; man jagar efter en inre själs-tomhet. I stället för objektivitet framträder det subjektiva godtycket. Nog är matematiken »formales aufgebaut» på basis af *alla* i erfarenheten gifna *allmänna* räknelagar, men aldrig i strid med eller med upphäfvande af dem, ty man kan ju aldrig räkna annat än tal, och följaktligen måste alla allmänna tallagar upprätthållas.

Emellertid finnas två- eller flertydiga symboler (hvarje n^{te} grads ekv. definierar en n-tydig symbol, om rötterna äro olika), om hvilka man kan uppvisa analoga egenskaper med de i »Zur Theorie etc.» införda »enheterna». Då denna fråga är främmande för uppsatsens syfte, vill jag blott i korthet antyda, att, om jag t. ex. inför den fyra-tydiga symbolen α, definierad medels $\alpha^4 = 1$, formen

$$\xi_3\alpha^3 + \xi_2\alpha^2 + \xi_1\alpha + \xi_0,$$

där ξ_3, ξ_2, ξ_1 och ξ_0 äro pos. eller neg. kvantiteter, uppfyller sådana fordringar, som Weierstrass ställer på likartade »komplexa» former.

Förutnämnda form kan dessutom icke blifva *ständigt* noll (oberoende af hvad värde α har), utan att samtliga ξ_3, ξ_2, ξ_1 och ξ_0 äro noll. (Jämf. $x + yi$ kan icke vara noll, utan att både x och y äro noll.) Formen $\alpha^3 + \alpha$ är en individ af föregående form, likaså $\alpha^3 - \alpha$. Bildas nu produkten af dessa individer, får man

$$(\alpha^3 + \alpha)(\alpha^3 - \alpha) = \alpha^6 - \alpha^2 = \alpha^2 - \alpha^2 = 0.$$

Alltså, produkten blir *ständigt* noll, utan att någon faktor *nödvändigt* är noll. När den ena faktorn ej är noll, så är den andra det, beroende på hvilket värde den fyra-tydiga α har i ett visst moment. Det är i nyssnämnda enkla sakförhållande, som jag trott mig finna förklaringen till »Theiler der Null».

I sammanhang härmed framhålles, att s. k. geometriska kalkyler, som betjäna sig af *flertydiga* symboler för att bestämma det, som *entydigt* är, icke kunna anses form-enliga.

Införes $u = S(x)$, får man ur (69)

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2u^2)}}.$$

K kan, om också icke omedelbart, härur beräknas, och följaktligen blir perioden $4K$ bekant.

Sistskrifna integral är diskontinuerlig för $u = 1$, men vi kunna medels ett förfaringssätt, likartadt med det, som användes vid härledningen af det andra integraluttrycket för ω (se sid. 13), erhålla ett uttryck för K, som ej är diskontinuerligt för och mellan gränserna, nämligen

$$K = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+k_1}}} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}},$$

där

$$k_1 = +\sqrt{1 - k^2}.$$

Vi skola nu uppvisa, att S- och C-funktionerna förutom den reella perioden äga en imaginär sådan. $C(x)$ är en jämn funktion och således $C'(x)$ en udda funktion. Följaktligen är för *reella x-värden* $C(ix)$ reell, men $C'(ix)$ rent imaginär.

Af (58c) får man

(70) $$C'^2(ix) = \{1 - C^2(ix)\}\{1 - k^2 C^2(ix)\}.$$

På grund af det nyssnämnda är för reella x-värden vänstra membrum i sistskrifna ekvation negativt, då måste en af faktorerna i högra membrum vara det. Häraf inses, dels att

$$\frac{1}{k^2} \geqq C^2(ix) \geqq 1$$

och dels att $C(ix)$ icke kan blifva noll för något reellt x-värde. Emedan $C(i \cdot o) = C(o) = 1$, måste således

$$\frac{1}{k} \geqq C(ix) \geqq 1.$$

När x genomlöper en viss positiv värdesträcka från nollpunkten, växer $C(ix)$ och genomlöper en positiv värdesträcka från punkten $+1$, och maximivärdet på $C(ix)$ blifver $\frac{1}{k}$. Vi kunna således sätta

$$C(iK_1) = \frac{1}{k},$$

där K_1 är en positiv kvantitet.

Enligt (58a) är

$$S^2(x) = \frac{1 - C^2(x)}{1 - k^2 C^2(x)}.$$

Häraf

$$S(iK_1) = \infty,$$

där vi med symbolen ∞ förstå en rörlig kvantitet, hvars modyl växer öfver alla gränser.

Sättes $y = iK_1$ i (63) och (67), får man

(70a)
$$\begin{cases} S(x + iK_1) = \dfrac{1}{kS(x)}, \\ C(x + iK_1) = \dfrac{1}{kC(x)}. \end{cases}$$

Häraf

$$S(x + 2iK_1) = S(x),$$
$$C(x + 2iK_1) = C(x).$$

$2iK_1$ utgör således period till $S(x)$ och $C(x)$.

Af våra formler framgår uppenbart, att

$$C(2niK_1) = 1 \text{ (n ett pos. l. neg. helt tal l. 0)}$$

och att inga andra rent imaginära argumentvärden satisfiera $C(x) = 1$. På grund häraf inses med tillhjälp af (58a), dels att

$$S(2niK_1) = 0$$

och dels att $S(x)$ icke kan blifva noll för andra rent imaginära argumentvärden.

Enligt det föregående växer $C(ix)$, då x genomlöper den positiva sträckan från 0 till K_1; följaktligen måste inom detta område derivatan af $C(ix)$, d. v. s. $[iC'(ix)]$ vara positiv, och således är enligt (70)

(71a)
$$iC'(ix) = +\sqrt{\{C^2(ix) - 1\}\{1 - k^2 C^2(ix)\}}.$$

Häraf

(71b)
$$\int_0^{K_1} dx = \int_0^{K_1} \frac{iC'(ix)dx}{\sqrt{\{C^2(ix) - 1\}\{1 - k^2 C^2(ix)\}}}.$$

Sättes $u = C(ix)$, så erhåller man

$$du = iC'(ix).$$

Erinra vi oss nu, att, då x genomlöper den positiva sträckan från 0 till K_1, $C(ix)$ genomlöper en positiv sträcka från 1 till $\frac{1}{k}$, så får man ur (71b)

$$K_1 = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(u^2 - 1)(1 - k^2 u^2)}},$$

hvilket genom användande af den bekanta substitutionen

$$k^2u^2 + k_1{}^2v^2 = 1, \text{ där } k^2 + k_1{}^2 = 1,$$

kan skrifvas

$$K_1 = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k_1{}^2v^2)}}.$$

K_1 kan om också icke omedelbart härur beräknas. I analogi med det andra integraluttrycket för K erhålla vi för K_1 äfven uttrycket

$$K_1 = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+k}}} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k_1{}^2v^2)}}.$$

För att bestämma S-funktionens nollställen begagna vi oss af Abels förfaringssätt*. De argumentvärden, för hvilka S-funktionen blifver noll, sammanfatta vi i uttrycket $\alpha + \beta i$ (α och β reella storheter), således

$$S(\alpha + \beta i) = 0.$$

Ur additionsteoremet (62) erhålles

(72) $$\frac{S(\alpha)C(\beta i) + S(\beta i)C(\alpha)}{1 + k^2S(\alpha)S(\beta i)C(\alpha)C(\beta i)} = 0.$$

Af det föregående veta vi, att

$$1 \geqq |\ S(\alpha)\ | \geqq 0,$$
$$1 \geqq |\ C(\alpha)\ | \geqq 0,$$
$$\frac{1}{k} \geqq |\ C(i\beta)| \geqq 1.$$

Uttrycket (72) kan således ej blifva noll, om nämnarn blifver oändligt stor, ty detta inträffar endast för $S(i\beta_1) = \infty$, men då kan vänstra membrum i (72) skrifvas $\frac{1}{k^2S(\alpha)C(\beta i)}$, hvilket uttryck ej kan blifva noll. Vi måste således få

$$S(\alpha)C(\beta i) + S(\beta i)C(\alpha) = 0,$$

och detta gifver

(73) $$\begin{cases} S(\alpha)C(\beta i) = 0. \\ S(\beta i)C(\alpha) = 0. \end{cases}$$

$C(\beta i)$ kan ej vara noll, och på grund af (58a) kunna ej $S(\alpha)$ och $C(\alpha)$ samtidigt vara noll. Det enda sätt, hvarpå (73) kan satisfieras, är

$$S(\alpha) = 0,$$
$$S(\beta i) = 0.$$

* Jmfr »En studie öfver de elliptiska funktionerna» af K. Melander, Upsala 1883.

Häraf, enligt hvad förut nämndt är,

$$\alpha = 2mK$$
$$\beta i = 2nK_1 i.$$

S-funktionens alla nollställen äro således inneslutna i uttrycket

$$2mK + 2niK_1.$$

Af formeln $S(x + iK_1) = \frac{1}{kS(x)}$ fås omedelbart S-funktionens samtliga oändlighetsställen, hvilka kunna sammanfattas i uttrycket

$$2mK + (2n + 1)iK_1.$$

Af $S(x+K) = C(x)$ framgår tydligen C-funktionens nollställen, hvilka blifva

$$(2m + 1)K + 2niK_1.$$

Slutligen erhålles omedelbart af $C(x + iK_1) = \frac{1}{kC(x)}$ C-funktionens oändlighetsställen, och de blifva

$$(2m + 1)K + (2n + 1)iK_1.$$

Samtliga nu nämnda nollställen och oändlighetsställen äro enkla. Af våra formler framgår, att vi endast behöfva uppvisa, att t. ex. $x = 0$ är en enkel rot till ekv. $S(x) = 0$.

Begagna vi oss af (58e) och (58f) för att utveckla $S(x)$ i serie, blifver denna serieutveckling tydligen berättigad, så länge $(x) < K_1$.

Vi få

$$S(x) = x - \frac{(1 + k^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \text{etc.}$$

Häraf

$$\lim_{x=0} \frac{S(x)}{x} = 1.$$

$x = 0$ är således en enkel rot till $S(x) = 0$. Med den kännedom vi nu hafva om funktionernas nollställen och oändlighetsställen, äro vi i stånd att uttrycka hvardera funktionen som en kvot af två hela transcendenter. Sätta vi nämligen $S(x) = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ och $C(x) = \frac{\gamma(x)}{\delta(x)}$,

där $\alpha(x)$ innehåller S-funktionens nollställen,
$\beta(x)$ samma funktions ∞-ställen
och $\gamma(x)$ C-funktionens nollställen
samt $\delta)x)$ samma funktions ∞-ställen,

så kunna vi medels S- och C-funktionens additionsteorem, hvilka jämte formlerna (59a) fullständigt definiera dessa funktioner, få fundamentala relationer, ett slags additionsteorem för $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ och $\delta(x)$, och på detta sätt komma

till Jacobis Θ-funktioner (åtminstone analoga med dem). Ett dylikt detaljstudium ingår icke i planen för denna uppsats.

Ha vi en differentialekvation af formen

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2y^2),$$

så satisfieras den generellt af

$$y = S(x + c), \text{ där } c \text{ är en godtycklig konstant.}$$

Utbyta vi konstanten c mot andra, t. ex. $c_1 + K$, $c_2 + iK_1$, $c_3 + K + iK_1$ o. s. v., där c_1, c_2 och c_3 äro godtyckliga konstanter, så öfvergår $y = S(x + c)$ successivt i formerna

$$y = C(x + c_1),$$

$$y = \frac{1}{kS(x + c_2)},$$

$$y = \frac{1}{kC(x + c_3)}, \text{ o. s. v.,}$$

hvilka helt naturligt likaväl äro generella solutioner till förestående diff.-ekv. Önskar man någon annan lösning, så får man gå till S-funktionens additionsteorem: den innehåller alla tänkbara former, under förutsättning af att vi vilja behålla samma värde på k.

Ekv. (58 d) hade utseendet

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k^2S(x)C(x), \text{ där } \frac{f'(0)}{f(0)} = 0.$$

Vi införa beteckningen

$$D(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Häraf

$$\frac{D'(x)}{D(x)} = -\frac{f'(x)}{f(x)}, \text{ och således}$$

(74 a) $$\frac{D'(x)}{D(x)} = -k^2S(x)C(x), \text{ samt}$$

$$D'(0) = 0.$$

För att närmare bestämma D-funktionen sätta vi

$$D(0) = 1, \text{ således också } f(0) = 1.$$

Med tillhjälp af (58 e) kunna vi integrera (74 a) och få

(74 b) $$D^2(x) = 1 - k^2S^2(x) = \frac{1 - k^2}{1 - k^2C^2(x)} \text{ eller}$$

$$(74c) \qquad D(x) = \frac{1 - k^2 S^2\left(\frac{x}{2}\right) C^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + k^2 S^2\left(\frac{x}{2}\right) C^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Med tillhjälp af (58a) och (74b) erhåller man

$$(74d) \qquad 1 - S^2(x) = C^2(x) D^2(x).$$

Riktigheten af (74c) verifieras lättast, om man logaritmiskt deriverar nämnda uttryck och sedan betjänar sig af de ur (63) och (67) omedelbart framgående formlerna

$$(75a) \qquad S(x) = \frac{2S\left(\frac{x}{2}\right) C\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + k^2 S^2\left(\frac{x}{2}\right) C^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

$$(75b) \qquad C(x) = \frac{C^2\left(\frac{x}{2}\right) - S^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - k^2 S^2\left(\frac{x}{2}\right) C^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Medels de formler vi i det föregående härledt för S- och C-funktionen, kan D-funktionen på grund af (74c) studeras. En formel, som vi i det följande behöfva, härledes omedelbart ur (74b), (74d) och (70a). Man får

$$D(x + iK_1) = hi \cdot \frac{C(x) D(x)}{S(x)},$$

där $h^2 = 1$.

För att entydigt bestämma h eller hvilket är det samma som tecknet i högra membrum, sätta vi $x = -i\frac{K_1}{2}$ i nämnda formel. Man får

$$(76) \qquad D\left(i\frac{K_1}{2}\right) = hi \frac{C\left(-i\frac{K_1}{2}\right)}{S\left(-i\frac{K_1}{2}\right)} D\left(-i\frac{K_1}{2}\right).$$

Nu är $D\left(-i\frac{K_1}{2}\right) = D\left(i\frac{K_1}{2}\right)$ enligt (74c).

Att

$$D\left(i\frac{K_1}{2}\right)$$

icke kan vara noll eller oändlig ses af (74b), enär enligt det föregående

$$(77) \qquad \frac{1}{k} \geq C(ix) \geq 1, \quad (x \text{ en reell storhet}).$$

Af (76) erhålles nu

(78) $$h = i \cdot \frac{S\left(i\frac{K_1}{2}\right)}{C\left(i\frac{K_1}{2}\right)}.$$

$C\left(i\frac{K_1}{2}\right)$ är positiv enligt (77).

Hur det förhåller sig med $S\left(i\frac{K_1}{2}\right)$, skall nu utredas.

Skrif för en stund

$$S(ix) = i\varphi(x),$$

berättigadt, enär $S(ix)$ är rent imaginär.

Genom derivering får man

$$S'(ix) = \varphi'(x)$$

häraf enligt (58 e)

(79) $$\varphi'(x) = S'(ix) = C(ix)\{1 - k^2S^2(ix)\}.$$

Då sistskrifna uttryck endast innehåller reella storheter och $\varphi'(0) = 1$, så inses, att, då x genomlöper en viss positiv sträcka från nollpunkten, $\varphi'(x)$ växer; och då $\varphi(0) = 0$, måste således $\varphi(x)$ vara > 0 i den positiva närheten af nollpunkten. Men på grund af (77), (79) och (58 a) fortfar $\varphi(x)$ att växa, tills x uppnår värdet K_1, då

$$\varphi(K_1) = +\infty.$$

Följaktligen blir enligt (78)

$$h = -1,$$

och således också

(80) $$D(x + iK_1) = -i\,\frac{C(x)D(x)}{S(x)}.$$

Om vi i det följande behöfva tydligen framhålla, hvilken modylen är, som ingår i någon förekommande funktion, betecknas modylen såsom en index till funktionssymbolen, t. ex. $S_k(x)$.

Ekv. (74 a) kan med tillhjälp af (74 b) skrifvas

$$\overline{D'_k(x)}^2 = \left\{1 - D_k^2(x)\right\}\left\{D_k^2(x) - k_1^2\right\},$$

men då

$$\mathrm{D}(x) = \frac{1}{f(x)},$$

ha vi också

$$\overline{f'_k(x)}^2 = \left\{f_k^2(x) - 1\right\}\left\{1 - k_1^2 f_k^2(x)\right\}.$$

Jämföres denna form med (71 a), som kan skrifvas

$$\left\{iC'_{k_1}(ix)\right\}^2 = \left\{C_{k_1}^2(ix) - 1\right\}\left\{1 - k_1^2 C_{k_1}^2(ix)\right\}.$$

måste

$$hf'_{k_1}(x+a)=iC'_{k_1}(ix),\ (a=\text{konstant};\ h^2=1),$$

emedan dessa uttryck framgå ur samma form. Häraf medels integration

$$hf_k(x+a)=C_{k_1}(ix);$$

men då $f(0)=1$ på samma gång som $C(0)=1$, blifver

$$f_k(x)=C_{k_1}(ix),$$

och således

(81) $$C_{k_1}(ix)=\frac{1}{D_k(x)}.$$

Häraf

$$C_{k_1}(x)=\frac{1}{D_k(ix)},$$

och således

(82) $$C_{k_1}(x+K_1)=\frac{1}{D_k(ix+iK_1)}.$$

Jämföras förut erhållna integraluttryck för K och K_1, så inses omedelbart, att om modylerna k och k_1 permuteras, måste K och K_1 permuteras. Häraf drages den slutsats, att, då enligt (66)

$$C_k(x+K)=-S_k(x),$$

(83) $$C_{k_1}(x+K_1)=-S_{k_1}(x).$$

Medels (80) och (83) kan (82) skrifvas

$$S_{k_1}(x)=i\frac{C_k(ix)D_k(ix)}{S(ix)},$$

hvaraf slutligen

(84) $$S_{k_1}(ix)=-i\frac{C_k(x)D_k(x)}{S_k(x)}.$$

Med tillhjälp af formlerna (81) och (84) kunna vi, om vi därjämte begagna oss af additions- och andra för S- och C-funktionen erhållna formler, fullständigt studera S- och C-funktionen äfven för komplexa argumentvärden.

Ekv. (47) skrifva vi nu

$$F(x+y)D(x)D(y)=\frac{S(x)+S(y)}{C(x)+C(y)}.$$

Poneras $y=0$, erhålles häraf

$$F(x)D(x)=\frac{S(x)}{1+C(x)},$$

eller enligt (74c), (75), (58a) och (58e)

$$F(x)=\frac{S\left(\frac{x}{2}\right)}{C\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{1-k^2S^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{S\left(\frac{x}{2}\right)}{S'\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Samtliga de i funktionalekv. (47) ingående funktionerna äro härmed entydigt bestämda.

Jag sammanställer i efterföljande tabell några för S- och C-funktionen gällande grundformler, hvilka i det föregående blifvit härledda eller omedelbart framgå ur dessa, allt under jämförelse med sinus- och cosinus-funktionen. I st. f. beteckningen $\frac{\pi}{2}$ använda vi i tabellen beteckningen ω.

$S(0)=0$	$\sin 0=0$
$S(K)=1$	$\sin \omega=1$
$S(2K)=0$	$\sin 2\omega=0$
$S(3K)=-1$	$\sin 3\omega=-1$
$S(4K)=0$	$\sin 4\omega=0$
$C(0)=1$	$\cos 0=1$
$C(K)=0$	$\cos \omega=0$
$C(2K)=-1$	$\cos 2\omega=-1$
$C(3K)=0$	$\cos 3\omega=0$
$C(4K)=1$	$\cos 4\omega=1$
$S(-x)=-S(x)$	$\sin(-x)=-\sin x$
$C(-x)=C(x)$	$\cos(-x)=\cos x$
$S(x+K)=C(x)$	$\sin(x+\omega)=\cos x$
$C(x+K)=-S(x)$	$\cos(x+\omega)=-\sin x$
$S(K-x)=C(x)$	$\sin(\omega-x)=\cos x$
$C(K-x)=S(x)$	$\cos(\omega-x)=\sin x$
$S(x\pm 2K)=-S(x)$	$\sin(x\pm 2\omega)=-\sin x$
$C(x\pm 2K)=-C(x)$	$\cos(x\pm 2\omega)=-\cos x$
$S(x\pm 4K)=S(x)$	$\sin(x\pm 4\omega)=\sin x$
$C(x\pm 4K)=C(x)$	$\cos(x\pm 4\omega)=\cos x$
$S^2(x)+C^2(x)-k^2S^2(x)C^2(x)=1$	$\sin^2 x+\cos^2 x=1$
$S'(x)=C(x)\{1-k^2S^2(x)\}$	$\sin'(x)=\cos x$
$C'(x)=-S(x)\{1-k^2C^2(x)\}$	$\cos'(x)=-\sin x$
$\overline{S'(x)}^2=\{1-S^2(x)\}\{1-k^2S^2(x)\}$	$\sin'^2(x)=1-\sin^2 x$
$\overline{C'(x)}^2=\{1-C^2(x)\}\{1-k^2C^2(x)\}$	$\cos'^2(x)=1-\cos^2 x$
$S(x+y)=\frac{S(x)C(y)+S(y)C(x)}{1+k^2S(x)S(y)C(x)C(y)}$	$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$
$C(x+y)=\frac{C(x)C(y)-S(x)S(y)}{1-k^2S(x)S(y)C(x)C(y)}$	$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

För S- och C-funktionen ha vi dessutom de viktiga formlerna

$$S(x + iK_1) = \frac{1}{k\,S(x)},$$

$$C(x + iK_1) = \frac{1}{k\,C(x)},$$

$$S_{k_1}(ix) = -i\,\frac{C_k(x)\,D_k(x)}{S_k(x)},$$

$$C_{k_1}(ix) = \frac{1}{D_k(x)}.$$

D-funktionen är bestämd genom formlerna (74).

En blick på förestående tabell visar oss en påfallande analogi mellan de båda funktionssystemen. För att ytterligare belysa denna analogi sätta vi

$$T(x) = \frac{S(x)}{C(x)}.$$

På grund af (62) och (67) får man

$$T(x + y)\,T(x - y) = \frac{T^2(x) - T^2(y)}{1 - T^2(x)\,T^2(y)},$$

således en form, som gäller äfven för den trigonometriska tangentfunktionen.

Den förändring, som i fråga om de elliptiska funktionernas beteckning i det föregående vidtagits, framgår genom jämförelse med de Jacobiska, hvilka Gudermann betecknat med snx, cnx och dnx, men Briot och Bouquet med $\lambda(x)$, $\mu(x)$ och $\nu(x)$. Vi ha nämligen följande samband:

$$S(x) = snx = \lambda(x),$$

$$C(x) = \frac{cnx}{dnx} = \frac{\mu(x)}{\nu(x)},$$

$$D(x) = dnx = \nu(x),$$

häraf

$$cnx = C(x)\,D(x)$$

Sedan gammalt har cnx, Jacobi's cosinus-amplitudo, ansetts vara analog med cosinus-funktionen. (Se härom t. ex. sid. 138 i Fischers tyska bearbetning af Briot och Bouquet's teori för dubbelperiodiska funktioner, Halle 1862). Att detta icke kan vara riktigt, ser man af förestående tabell, och jag har i de arbeten, som varit mig tillgängliga och som upptaga de Jacobiska funktionerna*, icke sett någon framhålla den rätta analogien: *då $S(x)$ jämföres med sinus-funktionen, måste $C(x)$ jämföras med cosinus-funktionen.* Tannery-

* Jämför t. ex. W. Laska's rikhaltiga och sammanfattande formelsamling öfver de Jacobiska funktionerna, sid. 336—380, Zweite Lieferung, Braunschweig 1889.

Molk säga i företalet till sitt arbete* följande: »Nous avons donc cru devoir laisser une place considérable à ces fonctions de Jacobi, dont on a dit qu'elles ne joueraient plus qu'un rôle historique: à la vérité, ce rôle serait encore assez beau». Men de nämna ej i sitt arbete något om den framhållna analogien. Formlerna för S- och C-funktionerna blifva emellertid på grund häraf lättare att minnas och därigenom lätta att öfverskåda; dessutom äro de enkla. Icke utan skäl kan man därför uppställa den frågan, om icke S- och C-systemet kunde läggas till grund för den elementära behandlingen af de elliptiska funktionerna. Lättheten att kunna öfverskåda formlerna för dem är ju ur praktisk synpunkt ett talande skäl. Likaväl som man vid behandlingen af exponential-funktionen kan utgå från formen

$$f(x+y) = f(x)f(y),$$

torde man med samma rätt kunna utgå från funktionalekv. (47), när det gäller att elementärt behandla de elliptiska funktionerna. Medels denna utgångspunkt kan den formella existensen af dubbelperiodiska funktioner omedelbart ådagaläggas.

Liksom man i trigonometrien inför några behöfliga funktioner definierade medels sinus- och cosinus-funktionen, så kan man äfven i fråga om elliptiska funktioner införa en mängd andra behöfliga funktioner, men dessa kunna definieras medels S- och C-systemet. En sådan funktion är t. ex. den i det föregående definierade D-funktionen.

I det följande kapitlet skall jag söka motivera, hvarför, bland alla tänkbara system elliptiska funktioner af andra graden, jag anser S- och C-systemet vara *enklast.*

---

* Éléments De La Théorie des Fonctions Elliptiques, Tome I och II, Paris 1893 och 1896.

4.

En allmän betraktelse öfver additionsteorem. Är p(u) den enklaste elliptiska funktion af andra graden?

På det sätt jag i det föregående utförligt visat, har jag löst en mängd enkla individuella additionsformler. Jag kan som ytterligare exempel nämna, att följande tre former

$$F(x+y)=f(x)f(x)\,\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{\psi(y)-\psi(y)},$$

$$F(x+y)=f(x)f(y)\,\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{1+\psi(x)\psi(y)}$$

och

$$F(x+y)=f(x)f(y)\,\frac{1+\varphi(x)\varphi(y)}{1+\psi(x)\psi(y)}$$

samtliga leda till elliptiska funktioner af andra graden, men de generella formerna på φ- och ψ-funktionerna blifva ej desamma som i funktionalekv. (47); formen (47) är enklast att diskutera. Ofvanstående tre former jämte formen (47) utgöra de fyra grundtyper, till hvilka alla sådana former kunna öfverföras, där vänstra membrum har symbolen $F(x+y)$ och där högra membrum har tvåtermiga uttryck i täljarn och nämnarn. Uppställer man nu en mängd additionsformler och söker lösa dem på förut angifvet sätt, finner man esomoftast, att man icke kommer till något nytt i sak. Mången gång öfvergå de sökta funktionerna i konstanter. Ett rationellt tillvägagående är nödvändigt, om arbetet icke skall blifva resultatlöst. På grund af relationen

$$S^2(x)+C^2(x)-k^2S^2(x)C^2(x)=1,$$

finner man, att för S- och C-funktionen erhållas algebraiska additionsteorem af formen

$$G\{S(x+y),\ S(x),\ S(y)\}=0$$

$$G\{S(x+y),\ S(x),\ S(y)\}=0$$

Sådana relationer får man i hvarje fall vid lösningen af andra likartade funktionalekv. i form af additionsteorem, och man måste erhålla sådana, i annat fall blifva funktionerna ej bestämda. Såsom i inledningen nämndes, har Weierstrass *generellt* behandlat algebraiska additionsteorem. Uppställer man

emellertid individuella former af typen $F\{\varphi(x+y),\ \varphi(x),\ \varphi(y)\} = 0$, där F är en generell funktionsbeteckning, så finnas af dessa former oöfverskådliga mängder och arbetet blir ofruktbart. Ett par individuella fall skall emellertid leda oss till ett rationellt förfaringssätt.

Exponentialfunktionens additionsteorem har formen

$$e(x+y) = e(x)e(y).$$

Nu är

$$e(-u) = \frac{1}{e(u)},\quad (u = x,\ y),$$

således

(85) $$e(x+y)e(-x)(-y) = 1.$$

Sätt

$$e(-x) = \alpha,\ e(-y) = \beta,\ e(x+y) = \gamma.$$

Ekv. (85) kan således skrifvas

$$\alpha\beta\gamma = 1,$$

som är en *symmetrisk* form af α, β och γ.

För den trigonometriska tangentfunktionen gäller additionsteoremet

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(y)}{1 - \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}.$$

Denna kan skrifvas, då $\operatorname{tg}(-u) = -\operatorname{tg}(u)$, $(u = x,\ y)$, om vi använda beteckningarna

$$\alpha = \operatorname{tg}(-x),\ \beta = \operatorname{tg}(-y),\ \gamma = \operatorname{tg}(x+y),$$

såsom följer:

$$\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma = 0,$$

hvilket uttryck är en symmetrisk form af α, β och γ.

Hvad som gäller i dessa två individuella fall, skall jag uppvisa vara en generell sanning.

Antag formen

(86) $$F\{\varphi(x+y),\ \varphi(x),\ \varphi(y)\} = 0,$$

där F är en generell funktionsbeteckning. Då x och y kunna permuteras utan att $\varphi(x+y)$ ändrar form, måste formen F vara symmetrisk med afseende på $\varphi(x)$ och $\varphi(y)$, således med afseende på den andra och tredje funktionssymbolen inom F. Utbyta vi i (86) y mot $-y$, får den utseendet

(87) $$F\{\varphi(x-y),\ \varphi(x),\ \varphi(-y)\} = 0.$$

Skrif sedan $x+y$ i st. f. x öfvergår (87) i

(88) $$F\{\varphi(x),\ \varphi(x+y),\ \varphi(-y)\} = 0.$$

Dessa transformationer äro berättigade, enär $\varphi(x)$ enligt antagandet är en verklig funktion och förekommer i alla tre formerna (86), (87) och (88). Existensen af $\varphi(x)$ inom något område kräfver, om additionsteoremet skall vara rimligt, existensen af $\varphi(x-y)$ och $\varphi(-y)$.

Enligt hvad nyss bevisades, är (88) en symmetrisk form med afseende på den andra och tredje funktionssymbolen inom F, således symmetrisk med afseende på $\varphi(x+y)$ och $\varphi(-y)$. Men då $\varphi(x+y)$ är symmetrisk med afseende på x och y, måste formen F vara symmetrisk med afseende på alla tre funktionssymbolerna.

Sättes nu

$$\alpha = \varphi(-x),\ \beta = \varphi(-y),\ \gamma = (x+y),$$

öfvergår (88) i

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

i hvilken ekv. α, β och γ kunna permuteras, utan att formen ändrar utseende.

Vi ha nu kommit till den lika enkla som generella satsen:

Om $\alpha = \varphi(-x)$, $\beta = \varphi(-y)$, $\gamma = \varphi(x+y)$, *så kunna alla tänkbara additionsteorem af formen* $F\{\varphi(x+y), \varphi(x), \varphi(y)\} = 0$ *bringas till symmetriska former af* α, β och γ.

Söka vi nu svaret på frågan, hvilka funktioner satisfiera ett sådant additionsteorem, där $\gamma = \varphi(x+y)$ uppträder lineärt eller omedelbart är entydigt bestämdt, så gäller det blott att lösa en funktionalekv. af formen

(89) $$a_0 + a_1(\alpha+\beta+\gamma) + a_2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) + a_3\alpha\beta\gamma = 0,$$

där α, β och γ ha en förut angifven betydelse. Förfara vi enligt angifven metod, få vi

(90) $$\varphi'(x) = a + b\varphi(x) + c\varphi^2(x).$$

Formen (89) leder således ej till elliptiska funktioner.

Är vår önskan endast den, att få reda på den generellaste form, som *möjligen* kan satisfiera (89), så är det tillräckligt, att utbyta γ mot en generell funktionsbeteckning $F(-x-y)$ och sedan lösa den så erhållna formen, hvarigenom lösningen blir enklare. I annat fall tillkommer den villkorsekvation, som erhålles, om y sättes lika med 0 i (89), och medels denna villkorsekvation måste vi omskrifva (89), hvilken sedan löses på vanligt sätt.

Om $\varphi(u)$ är en elliptisk funktion, så måste på grund af (89) och (90) dess symmetriska additionsteorem vara af minst andra graden. Tänkes denna form löst, så att $\varphi(x+y)$ uppträder lineärt och således blir entydigt bestämdt, så måste någon annan (eller andra funktioner) funktion uppträda i detta additionsteorem: denna andra funktion kan vara en derivata till $\varphi(u)$, eller en funktion, som står i något annat sambaud med $\varphi(u)$, dock ej lineärt, eller en *samhörig** funktion till $\varphi(u)$.

---

* Om jag har en funktion $\varphi(x)$ och utbyter x mot $x+c_1$, där c_1 är en konstant, så använder jag namnet *samhörigt* funktionssystem för $\varphi(x)$ och $\varphi(x+c_1)$, om intet lineärt samband dem emellan förefinnes. Definitionen kan, om behöfligt är, utsträckas.

I det lineärt skrifna additionsteoremet för Weierstrass' p-funktion figurerar $p'(u)$; i S-funktionens lineärt skrifna additionsteorem (63) figurerar en samhörig funktion, C-funktionen. Alltså andra funktioner än S och p. Mellan $p(u)$ och $p'(u)$ finnes intet lineärt samband, ej heller mellan S- och C-funktionen. Häraf slutes: man kan icke tala om *en* elliptisk funktion såsom varande den enklaste; frågan måste formuleras: hvilket system elliptiska funktioner är det enklaste. Emellertid läser man i Schwarz' »Formeln und Lehrsätze» på sid. 11 följande: »Unter allen doppeltperiodischen Functionen überhaupt ist daher die Function $p(u)$ die *möglichst einfache*».* Icke kan väl en så oväsentlig sak, att ett par oväsentligt singulära punkter sammanfalla, vara bestämmande för *hela* funktionens enkelhet. Funktionen skall väl betraktas ur totalitetens synpunkt. Från den synpunkten sedd, ställer sig frågan om enkelhet mycket ofördelaktigt för systemet p och p':

1:o) $p(u)$ och $p'(u)$ uppträda ej symmetriskt i deras respektive additionsteorem;

2:o) sambandet mellan $p(u)$ och $p'(u)$ är uttryckt genom en tredje grads ekv. Dessa två nu framhållna synpunkter göra additionsteorem för $p(u)$ och $p'(u)$ praktiskt oanvändbara.

Härtill kommer att den påstådda enklaste elliptiska funktionen af *andra* graden i sitt additionsteorem — enligt min mening i sin ändliga definitionsekvation — innehåller en elliptisk funktion af *tredje* graden, nämligen $p'(u)$.

Ser man på det samhöriga S- och C-systemet, så äro additionsteoremen symmetriska med afseende på S- och C-funktionen; sambandet mellan S- och C-funktionen är uttryckt genom ekv. $S^2 + C^2 - k^2S^2C^2 = 1$, således genom en ofullständig andra grads ekv., hvarigenom additionsteoremen blifva praktiskt användbara.

Härtill kommer, att både S- och C-funktionen äro elliptiska funktioner af andra graden.

S- och C-systemst är för öfrigt det enda samhöriga och symmetriska system elliptiska funktioner, hvilka sinsemellan äro förbundna genom en ofullständig andra grads form. Detta inses omedelbart, om vi utgå från den generellaste differentialekv., som satisfieras af en elliptisk funktion af andra graden **, nämligen från

$$\overline{\varphi'(u)}^2 = A\varphi^4(u) + B\varphi^3(u) + C\varphi^2(u) + D\varphi(u) + E. \tag{91}$$

Tänka vi oss en annan funktion ψ, förbunden med φ medels den ofullständiga, men symmetriska andra grads formen $\varphi^2 + \psi^2 - k^2\varphi^2\psi^2 = 1$, och begära, att den så definierade ψ-funktionen skall satisfiera (91), så visar räkningen, att detta icke kan äga rum, utan att (91) öfvergår i formen

$$\overline{\varphi'(u)}^2 = a^2\{1 - \varphi^2(u)\}\{1 - k^2\varphi^2(u)\},$$

en form, som satisfieras af

$$\varphi(u) = S_k(au),$$

* Kursiveringen af förf. till denna uppsats.

** Se sid. 386 i Biermanns anf. arbete.

Härmed är således uppvisadt, att S- och C-systemet är enklast bland alla tänkbara system elliptiska funktioner af andra graden.

Resultatet af min undersökning i detta kapitel utmynnar nu i, att jag åt de gamla funktionerna, åt de Jacobiska funktionerna vindicerat den rätt, dem tillkommer. Sättet att härleda dem, beteckningarna för dem kan växla, en klarare uppfattning af dem kan man vinna, men kärnan i dem är beståndande, nämligen den, att vara den bästa grund att bygga på vid studiet af elliptiska funktioner af andra graden.

Af σ-funktionens oändliga produktform kunna vi ej hämta något stöd för $\wp$-funktionens enkelhet, ty det enda vi veta är, att någon form $e^{g(u)}\sigma(u)$, där $g(u)$ är en hel funktion, lämnar det enklaste system elliptiska funktioner. I sammanhang härmed kan jag icke underlåta att göra följande digression från ämnet, huru olämplig den än må synas. På sid. 170 i Biermann definieras en monogen analytisk funktion. Den bestämmes som ett system af potensserier, fastkedjade vid hvarandra enligt en närmare angifven föreskrift. Nu är matematikens mål att ge form åt lagbundna företeelser i verkligheten, — att jaga efter tomma tankeformer, i hvilka intet innehåll kan inpressas, det är att jaga efter en skuggfana. Men när verkligheten analyseras fordrar den för sitt studium analytiska funktioner, hvilka för ett entydigt och fixeradt argumentvärde representera något entydigt och fixt. Uppfyller omnämnda definition på en monogen analytisk funktion den fordran, som verkligheten ställer på en funktion? Att en lagbunden potensserie är en *entydig* symbol, kan ej bestridas, men om man påstår, att denna symbol för ett entydigt fixeradt argumentvärde representerar något fixt, det kan och bör bestridas. Symbolen ∞ representerar intet fixt: den symbolen representerar något rörligt. Denna symbol ingår i en potensserie så till vida, att termernas *antal* är *utan* gräns. Potensserien måste med nödvändighet representera något rörligt. Detta gäller om alla oändliga former i matematisk mening — konvergerande eller icke — att de representera något rörligt. Den individuella formen $0{,}333\ldots\ldots$ är påtagligen en *rörlig* symbol: den kan således ej representera något *fixt*. De individuella förnimmelsernas makt är för öfrigt så kolossal, att inga tankededuktioner, huru subtila de än må förefalla, kunna bortförklara det, som framgår ur de individuella förnimmelserna. Det är t. ex. på basis af en mängd individuella förnimmelser, sådana som

$$5 + 2 = 2 + 5,$$

$$7 + 3 = 3 + 7,$$

o. s. v., medels hvilka man höjer sig till den generella eller tankeförnimmelsen

$$a + b = b + a.$$

Men är detta nu sagda obestridligt, så kan man således ej medels förutnämnda definition på en monogen analytisk funktion ge form åt verkligheten: en sådan funktion kan ej representera något fixt, emedan dess element ej representera något fixt. Jag hemställer därför, om ej härtill kräfves ett tillägg, som gör definitionen fattbar. Liksom den rörliga symbolen $0{,}333\ldots\ldots$ kan sägas *framgå* ur den *fixa* symbolen $\frac{1}{3}$ (detta är ett erfarenhetsfaktum), så antar jag, att

Weierstrass bakom detta system af potensserier tänkt sig en enhetlig *fix* eller ändlig symbol, hvarur denna mångfald af *rörliga* symboler *framgår*, äfven om formen på denna fixa symbol icke alltid kan anges. Detta är nödvändigt, ty endast en *fix* eller ändlig symbol kan representera något *fixt*, och en *fix* symbol kan definieras endast genom en *ändlig* definitionsekvation.

Bevisa kan man ej, så vidt jag vet, att alla så definierade system af konvergerande rörliga symboler (potensserier), framgå ur fixa symboler — Weierstrass' definition är väl en storslagen hypotes. På grund af Cauchy's sats rörande synektiska funktioner vet man, att alla funktioner, som äga tillämpning i verkligheten, kunna utvecklas i potensserier.

Men är omvändningen sann? Weierstrass' definition på en monogen analytisk funktion är emellertid icke för trång, men möjligen för vid.

Jag har med det ofvanstående endast velat framhålla, att, enligt min öfvertygelse, en rörlig symbol, i följd af sin natur såsom rörlig, icke kan reprensentera något fixt och att den endast i det fall kan entydigt bestämma en fix storhet, att den kan anses härledd eller framgången ur en sådan.

5.

Några ord rörande symmetriska additionsteorem af minst andra graden.

De ansatser jag gjort för att tillämpa här förut angifven metod på symmetriska additionsteorem af högre gradtal än den första, skall jag i korthet antyda, ehuru jag ännu icke lyckats praktiskt genomföra lösningen.

Metoden erbjuder inga teoretiska svårigheter, men väl högst besvärliga räkningar. I allmänna drag kan förfaringssättet teoretiskt angifvas på följande sätt:

Antag, att vi ha ett symmetriskt additionsteorem af t. ex. 4:de graden, hvilket vi kunna teckna

$$(92)\quad G\{\varphi^4(-x-y),\ \varphi^3(-x-y),\ \varphi^2(-x-y),\ \varphi(-x-y),\ \varphi(x),\ \varphi(y)\} = 0.$$

Deriveras sistskrifna form med afseende på x och permuteras sedan x och y i den så deriverade ekvationen och subtraheras slutligen dessa två sist erhållna ekv., få vi omedelbart en ekv., som ej innehåller någon derivata $\varphi'(-x-y)$. Vi få i allmänhet en form

$$(93)\quad G_1\{\varphi^4(-x-y),\ \varphi^3(-x-y),\ \varphi^2(-x-y),\ \varphi(-x-y),\ \varphi'(x),\ \varphi'(y),\ \varphi(x),\ \varphi(y)\}=0.$$

Elimineras $\varphi^4(-x-y)$ ur (92) medels (93), erhålles en form

$$(94)\quad G_2\{\varphi^3(-x-y),\ \varphi^2(-x-y),\ \varphi(-x-y),\ \varphi'(x),\ \varphi'(y),\ \varphi(x),\ \varphi(y)\} = 0.$$

Med formen (94) förfara vi såsom med formen (93). Vi nedbringa den till en andra grads form och denna till en första grads form med afseende på $\varphi(-x-y)$. Af sistnämnda form få vi slutligen ekv.

$$(95)\quad G_3\{\varphi^{IV}(x),\ \varphi^{IV}(y),\ \varphi'''(x),\ \varphi'''(y),\ \varphi''(x),\ \varphi''(y),\ \varphi'(x),\ \varphi'(y),\ \varphi(x),\ \varphi(y)\} = 0,$$

en form, analog med (26), hvaraf lösningens teoretiska möjlighet inses. Härtill kommer den villkorsekv., som erhålles ur (92), då y sättes lika med noll. Men det kan inträffa, att vi visserligen alltid få en form (95), men ingen form, där $\varphi(-x-y)$ uppträder lineärt. I detta fall kunna vi ej erhålla ett additionsteorem, som entydigt bestämmer funktionen; sådana additionsteorem ha endast formell betydelse.

Se vi saken ur realsynpunkt och fråga, om de symmetriska additionsteoremen gifva realperiodiska funktioner — en blott formellt periodisk funktion

är t. ex. exponentialfunktionen, enär i är en tvåtydig räknesymbol — med egenskaper, analoga med sinus- och cosinus-funktionen, så blir uppgiften enklare.

Begagna vi oss fortfarande af beteckningarna $\alpha = \varphi(-x)$, $\beta = \varphi(-y)$, $\gamma = \varphi(x+y)$, så är formen på det symmetriska additionsteoremet af andra graden

$$(96)\quad \begin{cases} a_1 + a_2\Sigma\alpha + a_3\Sigma\alpha^2 + a_4\Sigma\alpha\beta + a_5\Sigma\alpha\beta^2 + a_6\Sigma\alpha^2\beta^2 + \\ + a_7\alpha\beta\gamma + a_8\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha + a_9\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha\beta + a_{10}\alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0. \end{cases}$$

Att en funktion, analog med cosinusfunktionen framgår ur (96) — en funktion, analog med sinusfunktionen framgår ej omedelbart — finna vi, om vi på $\varphi(x)$ ställa följande fordringar, nämligen

(97 a) $\varphi(0) = 1$,

(97 b) $\varphi(x + 2\omega) = -\varphi(x)$, 4ω en reell period till funktionen,

(97 c) $\varphi(-x) = \varphi(x)$ och som följder af (97 a, 97 b och 97 c),

(97 d) $\varphi(\omega) = 0$ och $\varphi(2\omega) = -1$.

Skrifva vi $y + 2\omega$ i st. f. y i (96), så öfvergår denna ekv. på grnnd af (97) i

$$(98)\quad a_1 + a_3\Sigma\alpha^2 + a_6\Sigma\alpha^2\beta^2 + a_7\alpha\beta\gamma + a_{10}\alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0.$$

Sättes $y = 0$ i denna form, så erhåller man med tillhjälp af (97 a)

$$\varphi^4(x)\{a_{10} + a_6\} + \varphi^2(x)\{2a_6 + a_7 + 2a_3\} + a_3 + a_1 = 0.$$

Häraf

$$a_{10} = -a_6,\ a_3 = -a_1,\ a_7 = -2(a_6 + a_3).$$

Sätta vi $a_1 = -1$ och $a_6 = -k^2$, så komma vi till C-funktionens symmetriska additionsform

$$\begin{aligned} &-1 + C^2(x+y) + C^2(x) + C^2(y) - 2(1-k^2)C(x)C(y)C(x+y) - \\ &-k^2\{C^2(x+y)C^2(x) + C^2(x+y)C^2(y) + C^2(x)C^2(y)\} + \\ &+k^2C^2(x)C^2(y)C^2(x+y) = 0, \end{aligned}$$

hvilken form man genom några transformationer kan få fram ur C-funktionens additionsteorem (67).

Af intresse synes det symmetriska additionsteoremet af 3:dje graden vara. Jag kan här blott antyda, att denna form lämnar åter ett system funktioner, analoga med sinus- och cosinus-funktionen. Det symmetriska additionsteoremet af 3:dje graden har formen

$$(99)\quad \begin{cases} a_1 + a_2\Sigma\alpha + a_3\Sigma\alpha^2 + a_4\Sigma\alpha^3 + a_5\Sigma\alpha\beta + a_6\Sigma\alpha^2\beta + a_7\Sigma\alpha^3\beta + a_8\Sigma\alpha^2\beta^2 + \\ + a_9\Sigma\alpha^3\beta^2 + a_{10}\Sigma\alpha^3\beta^3 + a_{11}\alpha\beta\gamma + a_{12}\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha + a_{13}\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha^2 + \\ + a_{14}\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha\beta + a_{15}\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha^2\beta + a_{16}\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha^2\beta^2 + a_{17}\alpha^2\beta^2\gamma^2 + \\ + a_{18}\alpha^2\beta^2\gamma^2\Sigma\alpha + a_{19}\alpha^2\beta^2\gamma^2\Sigma\alpha\beta + a_{20}\alpha^3\beta^3\gamma^3 = 0. \end{cases}$$

En funktion, analog med sinus-funktionen, framgår ej omedelbart af denna form, men väl en med cosinus-funktionen analog form.

Tillämpas samma förfaringssätt på formen (99) som på formen (96), kommer man till ett additionsteorem af formen

$$(100)\quad 1 - \Sigma\alpha^2 + a\Sigma\alpha^2\beta^2 + b\alpha\beta\gamma + c\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha^2 + d\alpha^2\beta^2\gamma^2 + e\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha^2\beta^2 - e\alpha^3\beta^3\gamma^3 = 0,$$

där a, b, c, d och e äro konstanta storheter.

Mellan dessa konstanter förefinnas relationerna:

$$a + d = -2(e + c),$$
$$b + c = +2(1 - a).$$

Införa vi symbolen $\psi(x) = \varphi(x + \omega)$, får man ur (100), om y poneras $= \omega$, relationen

$$(101)\qquad \varphi^2(x) + \psi^2(x) - a\varphi^2(x)\psi^2(x) = 1.$$

Deriveras (100) med afseende på y, och sättes i denna deriverade ekv. $y = \omega$, får man, under antagande af att $\varphi'(\omega) = -1$, ekv.

$$\psi'(x) = -\varphi(x)\cdot\frac{b + c\varphi^2(x) + c\psi^2(x) + e\varphi^2(x)\psi^2(x)}{2\{1 - a\varphi^2(x)\}}.$$

Denna ekv. kan med tillhjälp af (101) skrifvas

$$\psi'(x) = \frac{\varphi(x)}{2(a-1)}\cdot\{b + c + (e - ab)\psi^2(x) - (e + ac)\psi^4(x)\},$$

af hvilket uttryck vi kunna förstå, att åter ett system funktioner, analoga med sinus- och cosinus-funktionen, framgå ur (99).

De antydningar, jag nu lämnat i detta kapitel, äro naturligtvis att uppfatta såsom ansatser till lösningar af additionsteorem af högre gradtal. Det torde vara möjligt, att man medels antydda förfaringssätt kan härleda åtskilligt af intresse ur dem.